РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 5508—6307 **№ 11** **Ноябрь 1955 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

5508. **Тридцать лет науки в Узбекистане. Захидов Т. З.,** Изв. АН УзССР, 1954, № 6, 3—10

5509. **Из опыта Московской топологической школы. Александров П. С.,** Вестн. АН СССР, 1954, № 10, 34—38

Краткий обзор дятельности Московской топологической школы. Высказываются некоторые соображения о задачах воспитания молодых топологов.

Е. Ф. Мищенко

5510. **Сообщение о деятельности Чехословацкой академии наук. Шорм** (Zpráva o činnosti Československé akademie věd. Šorm František), Věst. Českosl. akad. věd., 1955, 64, № 1—2, 6—17 (чеш.)

5511. **Конференция, посвященная теории вероятностей и математической статистике, в Берлине [19—22 октября 1954 г.]. Новак** (Konference o počtu pravděpodobnosti a matematické statistice v Berlině. Novák Josef), Věst. Českosl. akad. věd, 1955, 64, № 1—2, 83—85 (чеш.)

5512. **Научное заседание I секции Чехословацкой академии наук,** Чехосл. матем. ж., 1954, 4, № 3, 290

Сообщение о заседаниях I секции, происходивших 13 и 14 апреля 1954 г. в Праге. Приводится перечень прочитанных докладов.

5513. **Годичное собрание в Питтсбурге. Шафер, Грин** (The annual meeting in Pittsburgh. Schafer R. D., Green J. W.), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, 61, № 2, 113—184 (англ.)

Приводятся краткие резюме докладов, представленных 61-му годичному собранию Американского математического общества 27—29 декабря 1954 г.

5514. **Итальянское математическое объединение. Деятельность с 1 января 1953 г. до 30 июня 1954 г. Сансоне** (Unione Matematica Italiana. Attività svolta dal 1° gennaio 1953 al 30 giugno 1954. Sansone Giovanni), Ricerca scient., 1954, 24, № 12, 2602—2608 (итал.; резюме франц., англ., нем.)

5515. **Конференция доцентов по механике и математической физике (31 мая 1954 г.)** (Convegno di docenti di meccanica e fisica matematica (31 maggio 1954), Riv. mat. Univ. Parma, 1954, 5, № 1—3, 221—223 (итал.)

5516. **Доклады Института прикладной математики Венгерской академии наук. Реньи** (A magyar tudományos akadémia alkalmazott matematikai intézetének közleményei. A II. kötet előszava. Rényi Alfréd), Akad. értesitő, 1954, 61, № 505, 212—216 (венг.)

Предисловие директора Института прикладной математики А. Реньи ко второму тому «Докладов института прикладной математики Венгерской академии наук».

5517. **Новый закон о школе и математике. Чех** (Nový školský zákon a matematika. Čech Eduard), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 3, 199—205 (чеш.)

5518. **Изменения в построении математики. Бенке** (Wandel im Aufbau der Mathematik. Behnke Heinrich), Math.-phys. Semesterber., 1953, 3, № 3/4, 139—164 (нем.)

Доклад на съезде немецкого объединения учителей математики и естественных предметов, популярно освещающий некоторые из изменений в структуре основных математических дисциплин, которые произошли за последние 50 лет. Отмечается проникновение в университетское преподавание аксиоматического метода и многих абстрактных понятий и теорий, возникших в течение последних десятилетий.

В. И. Левин

5519. **Математика как абстрактная наука и средство мышления точных естественных наук. Хассе** (Mathematik als Geistwissenschaft und Denkmittel der exakten Naturwissenschaften. Hasse H.), Studium gen., 1953, 6, № 392—398 (нем.)

5520. **Интуитивное и дискурсивное [логическое] мышление, сравнение. Клей** (Intuitive and discursive thought, a comparison. Clay J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, B57, № 1, 20—28; Indagationes math., 1954, 16, № 1, 20—28 (англ.)

Статья посвящена общефилософскому вопросу о соотношении интуитивного и логического мышления. По этому поводу автором высказано несколько наивных положений с метафизическим противопоставлением друг другу этих форм мышления.

Г. А. Сухомлинов

5521. **Классическое и современное понятие математической теории. Шольц** (Der klassische und der moderne Begriff einer mathematischen Theorie. Scholz Heinrich), Math.-phys. Semesterber., 1953, 3, № 1/2, 30—47 (нем.)

Для характеристики классического понятия математической теории выдвигаются принадлежащие Паскалю формулировки. Паскалевский язык математической теории определяется ссылкой на наличие характерных для этой теории математически значимых слов, распадающихся на основные и производные, и предложений, состоящих из основных и доказуемых с их помощью. Математическая теория в паскалевском смыс-

ле — совокупность всех математических истин, выражаемых паскалевским языком.

С целью оформления понятия современной математической теории автор обращается к работам Больцано. Особенность подхода Больцано усматривается в замене паскалевских основных слов математической теории соответствующими переменными. При математической интерпретации основных переменных получается математический больцановский язык. Особое значение приписывается принадлежащей Больцано характеристике понятия вывода: A вытекает из M, если каждая модель A есть модель M. В больцановском математическом языке имеем не математические высказывания, а формы таких высказываний. Абстрактная математическая теория состоит не из математических, а из определенных метаматематических истин. Математика определяется как планомерное исследование математических структур. В реферируемой работе для понятия математической теории делается определяющим понятие математического языка. Однако автор принужден в своих характеристиках пользоваться терминами, которые для своего осмысления предполагают уже оформленным понятие математической теории.

По мнению референта, причиной возникающих логических трудностей является то, что вопрос о природе математических теорий рассматривается вне постановки и правильного решения вопроса о предмете математики. Л. П. Гокиели

5522. Интуитивные методы в преподавании математики. Виганд (Intuitive Methoden in mathematischen Unterricht. Wigand Klaus), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 427—428 (нем.)

Автор пытается обосновать значение наглядности и интуиции в преподавании математики, исходя из пифагорийского взгляда на мир и рассматривая математику как искусство мышления и изобретения. Не учитывается, что единство путей открытия и доказательства исторически осуществляется в самом методе математики как науки. Л. П. Гокиели

5523. Абстракция и обобщение. Бюхи, Райт (Abstraction versus generalization. Büchi J. Richard, Wright Jesse B.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 398 (англ.)

5524. Новые планы и методические инструкции по преподаванию математики в шведских гимназиях. Гординг, Сандгрен (Nya kursplaner och metodiska anvisningar i matematik för gymnasiet i Sverige. Gårding Lars, Sandgren Lennart), Nord. mat. tidskr., 1954, 2, № 4, 169—171 (швед.; резюме англ.)

Новые планы и программы предусматривают некоторое усиление элементов математического анализа за счет сокращения курсов геометрии и тригонометрии. Авторы приводят соображения в пользу проведенной реформы. В. И. Левин

5525. Учебники по математике Союза швейцарских учителей математики. Бухнер (Die Mathematik-Lehrbücher des Vereins Schweizerischer Mathematiklehrer. Buchner Paul), Math.-phys. Semesterber., 1954, 4, № 1/2, 146—151 (нем.)

После краткого очерка истории среднего образования в Швейцарии (где все школы — и университеты — подчиняются только кантональному управлению, так как министерства просвещения нет) автор сообщает о выпуске с 1927 г. ряда школьных учебников по математике, которые были составлены по поручению и под руководством Союза швейцарских учителей математики по ранее разработанному плану. Приводятся краткие аннотации этих учебников. В. И. Левин

5526. Комплексный подход к основному курсу математики. Ван-Вориз (An integrated approach to basic mathematics. Van Voorhis W. R.), J. Engng Educ., 1954, 44, № 10, 600—605 (англ.)

Приводится аргументация в пользу перехода к ос ному курсу математики для студентов технических спе циальностей, содержащему необходимые сведения и алгебры, тригонометрии, аналитической геометрии начал математического анализа в более или мене связном изложении (в настоящее время в большин стве учебных заведений США читается несколько от дельных элементарных математических курсов).

В. И. Леви

5527. Типичные ошибки студентов высших техни ческих учебных заведений по высшей математике Троицкая Н. А., Сб. науч.-метод. тр. Том ского электромехан. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1954 1, № 1, 37 стр.

5528. Об улучшении преподавания математики Кидд (Improving the learning of mathematics Kidd Kenneth P.), Math. Teacher, 1954, 47 № 6, 393—400 (англ.)

Методическая статья.

5529. О методике преподавания комплексных чисе в средней школе. Линкер (Despre metodica pre dării numerelor complexe. Linker A.), Gaz. mat şi fiz., 1955, A7, № 2, 87—91 (рум.)

5530. Какими качествами должен обладать хороши учитель математики. Бреслич (What makes good teacher of mathematics. Breslich E. R.) Scripta math., 1953, 19, № 2—3, 211—216 (англ.

5531. Пересмотр требований, предъявляемых пр аттестации учителей математики средней школ в Оклахоме. Зант (The revision of certificatio requirements for secondary mathematics teachers i Oklahoma. Zant James H.), Math. Teache 1954, 47, № 7, 467—475 (англ.)

5532. Третье дополнение к библиографии математи ческих работ, опубликованных в Америке до 1850 г Карпинский (Third supplement to the Biblio graphy of mathematical works printed in Americ through 1850. Karpinski Louis C.), Script math., 1954, 20, № 3—4, 197—202 (англ.)

5533. Настольные книги для преподавания матема тики. Пьене (Håndbøker til matematikkundervis ningen. Piene Kay), Nord. mat. tidskr., 1954 2, № 3, 81—94 (норв.)

Приводится перечень книг — 92 названия.

5534 К. Собрание сочинений. Т. I. Теория потен циала. Теория вероятностей. Теория рядов. Гидро статика и гидродинамика. Теоретическая и небесна механика. Ляпунов А. М. М., Изд-во А СССР, 1954, 448 стр., 22 руб.

Реферируемый т. I содержит написанный акад В. И. Смирновым биографический очерк А. М. Ляпу нова и опубликованные работы последнего по разделам перечисленным в заглавии. По теории потенциала по мещено семь статей, шесть из которых вошли в книг А. М. Ляпунова «Работы по теории потенциала» (М.-Л Гостехиздат, 1949). Четыре статьи по теории вероятно стей (1900—1901) содержат доказательства предельно теоремы для сумм независимых случайных величи при различных допущениях о случайных величинах Статья «О рядах многочленов» (1915) составляет ра дел «Теория рядов» и содержит доказательство сходи мости ряда из многочленов в некоторой области ком плексных значений аргументов при некоторых предпо ложениях о многочленах в действительной области ар гументов. Статьи «О равновесии тяжелых тел в тяжелы жидкостях, содержащихся в сосуде определенной фор мы» (1881), «О потенциале гидростатических давлени (1881), «О постоянных винтовых движениях твердог тела в жидкости» (1888), «Новый случай интегриру

сти дифференциальных уравнений движения твер-
го тела в жидкости» (1893) составляют раздел «Гид-
статика и гидродинамика». Первые две статьи посвя-
ены изучению условий равновесия и устойчивости
л, погруженных в несжимаемые и сжимаемые жид-
сти. В третьей статье решается вопрос об устойчиво-
и указанных Лэмбом постоянных движений твердого
ла в жидкости. В четвертой статье указывается но-
ый интеграл движения твердого тела в жидкости,
торый является предельным для интеграла, найден-
го ранее В. А. Стекловым. Раздел «Теоретическая
небесная механика» содержит статьи: «Об устойчи-
сти движения в одном частном случае задачи о трех
лах» (1889), «Об одном свойстве дифференциальных
равнений задачи о движении тяжелого твердого тела,
меющего неподвижную точку» (1894), «О рядах, пред-
женных Хиллом для представления движения Луны»
896).

Х. Л. Смолицкий

5535 К. 7-я научная сессия (Ленингр. гос. пед. ин-т им. А. И. Герцена.) Тезисы докладов, вып. II, Л., 1954, 75 стр., беспл.

Приводятся, в частности, тезисы следующих докла-
в по математике: А. Г. Пинскер, Структуры, ивалентные K-пространствам. Е. С. Ляпин, системах операторов с неподвижными точками. А. Фридман, О полукоммутативном произве-нии групп. С. Г. Кислицын, Эффективный особ построения периодического решения нелиней-го дифференциального уравнения первого порядка. Г. Пинскер, Характеризация L-пространств. А. Егорова, О пространстве функций ограни-нной вариации. В. Д. Любовин, Полуупоря-ченное кольцо ограниченных самосопряженных опе-торов. Д. Р. Меркин, Влияние гироскопиче-ских сил на движение неконсервативной системы. С. Г. Кислицын, Отыскание функции по задан-ной ее второй итерации. К. А. Бохан, Об одном нелинейном функционале в «С». В. И. Сорокина, Пространство с дизъюнктными элементами.

5536 К. Высшая математика. Брадистилов (Висша математика. Брадистилов Георги, София, Наука и изкуство, 1954, 246 с., 9—90 лв.) Българ. книгопис., 1954, 58, № 10, 338 (библ.)

5537 К. Математические труды. Леви-Чивита (Opere matematiche. Levi-Civita Tullio. Memorie e note publicate a cura dell'Accademia nazionale dei Lincei. Vol. I: 1893—1900, XXX + + 563 p., Bologna, N. Zanichelli, 1954, 8000 L.), Bibliogr. ital., 1954, 88, № 639, 292 (библ.)

5538 К. О математическом мышлении. Вейзе (Vom mathematischen Denken. Weise Karl-Heinrich (Veröff. Schleswig-Holstein. Univ. Ges. N. F., № 2, Kiel, Ferdinand Hirt, 1953, 28 S.) (нем.)

На примерах аксиоматизации геометрии, понятия группы, проблемы квадратуры круга, неевклидовой и римановой геометрии и теории множеств автор излагает для нематематиков сущность математического мышления.

H. Gericke

Перевод из Zbl. Math., 1953, 50, № 1/5,3

5539 РжЦ. Полное собрание сочинений. Чебышев П. Л. М.— Л., Изд-во АН СССР. Том I, Теория чисел, 1944, 342 стр.; том II, Математический анализ, 1947, 520 стр.; том III. Математический анализ, 1948, 414 стр.; том IV. Теория механизмов, 1948, 255 стр.; том V. Прочие сочинения, биографические материалы, 1951, 474 стр. [**Рецензия: Гнеденко Б.,** Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 263—266].

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

5540. К изучению истории китайской науки. Григорьян А. Т. (Сессия в Институте истории естествознания и техники), Вестн. АН СССР, 1955, № 1, 119—121

5541. Образующие влияния в науке Ислама. Уинтер (Formative influences in Islamic science. Winter H. J. J.), Arch. internat. histoire sci., 1953, 6, № 23-24, 171—192 (англ.)

Термином «наука, Ислама» Уинтер предлагает заме-
ть старый термин «арабская наука», поскольку под
следней всегда понимают также науку, средневеко-
го Ирана и др. стран. Наука Ислама складывалась и
звивалась на основе знаний, заимствованных у древ-
их греков и у индийцев. Наиболее сильное влияние
науку Ислама оказала греческая наука. Так, главн-
ми в решении математических и физических задач
науке Ислама явились синтетико-геометрические,
не аналитические приемы (построение и классифика-
я кубических уравнений, оптические исследования
т. д.). Статичность и ограниченность геометрических
едставлений не позволили ученым Ислама притти
идеям аналитической геометрии. Ученые Ислама вос-
инняли отдельные достижения индийской математи-
(десятичная позиционная система, начала тригоно-
трии и астрономических вычислений), особенно цен-
е в практическом отношении; то же относится к аст-
номии и медицине. Приверженность к унаследован-
м от греков строгим логическим дедукциям поме-
ала включению в математику Ислама идеи отрицатель-
го числа, символики, теории неопределенных урав-
ний индийцев; индийская математика, сила которой
ла в ассоциациях и обобщениях, была чужда ученым Ислама. Математики Ислама развили свою науку далее, особенно в теории кубических уравнений и в тригонометрии; они сделали бы больше, если бы оказались более восприимчивыми к индийским влияниям. Крупные оригинальные достижения принадлежат ученым Ислама в астрономии, физике, химии и медицине.

Уинтер считает несомненным третьим источником науки Ислама науку древнего Вавилона; пока, однако, имеется слишком мало данных для более определенной оценки этого фактора. Совершенно недостаточно изучены также связи между наукой Ислама и наукой Китая, особенно усилившиеся с XIII в.

Примечание референта. Концепция Уинтера вызывает ряд возражений: 1. Автор неправомерно сводит вопрос о развитии «науки Ислама» к вопросу об испытанных ею извне идейных влияниях. 2. Общая характеристика «математики Ислама», как в основе своей геометрической, а также ее достижений не соответствует современному состоянию знаний о ней; автор, видимо, незнаком с работами немецкого историка математики П. Люкея и советских исследователей (см. статьи референта и Б. А. Розенфельда в «Историко-математических исследованиях», М., Гостехиздат, вып. 4, 6, 7). 3. Автор не отмечает выдающейся роли народов Средней Азии (Хорезма, Таджикистана, Узбекистана) в развитии математики.

А. П. Юшкевич

5542. Легенды и заблуждения математической историографии. Фогель (Legenden und Irrtümer der mathematischen Geschichtschreibung. Vogel Kurt), Südhoffs Arch., 1953, 37. 161—169 (нем.)

5543. Ранние предпосылки аналитической геометрии. Бойер (Early contributions to analytic geometry.

Boyer Carl B.), Scripta math., 1953, **19**, № 2—3, 97—108 (англ.)

Статья является частью первой главы из намеченной к опубликованию работы автора по истории аналитической геометрии. Рассматривается первоначальный, исторически засвидетельствованный, период развития математики (Египет, Вавилон, Греция до конца V в. до н. э.) с точки зрения возникновения таких основных идей аналитической геометрии, как соответствие между числом и геометрической величиной, координаты, геометрические места. Речь идет, естественно, не об осознанных и четко сформулированных идеях, а лишь о связанных с ними частных вопросах. Отмечается значение трех классических задач древности (квадратура круга, трисекция угла, удвоение куба) для открытия первых, если не считать окружности, геометрических мест. Указывается, что препятствием для возникновения аналитической геометрии являлось отсутствие в то время общего понятия о числе и алгебраической символики и как следствие этого стремление к геометризации алгебры. Ввиду почти полного отсутствия каких-либо достоверных источников, относящихся к рассматриваемой эпохе, автор ограничивается преимущественно общими рассуждениями. В. Ф. Рогаченко

5544. III книга реконструкции Вивиани труда Аристея Старшего «О пространственных местах». Конте (Il Libro III della Divinazione Vivianea del «De locis solidis» di Aristeo il Vecchio. Conte Luigi), Period. mat., 1953, **31**, № 5, 265—274 (итал.)

Итальянский математик В. Вивиани (1622—1703), автор удачной реконструкции V книги «Конических сечений» Аполлония (1659), опубликовал в 1701 г. сочинение «De locis solidis etc», в котором сделал попытку восстановить содержание утраченных пяти книг «О пространственных местах» Аристея Старшего (конец IV в. до н. э.). По сообщению Паппа (конец III в. до н. э.), Аристей развил в названном труде учение о конических сечениях. Из пяти намеченных книг Вивиани успел подготовить три. Автор детально разбирает содержание и порядок 49 предложений III книги сочинения Вивиани (задачи на геометрические места, оказывающиеся «плоскими», т. е. прямыми и кругами или «пространственными», т. е. коническими сечениями; экстремальные свойства треугольников и параллелограммов; построение средних; построение конических сечений). В итоге делается вывод, что эта книга составлена под сильным влиянием Паппа, Аполлония, а также Торричелли и, за исключением нескольких предложений, должна быть весьма далека от труда Аристея.

А. П. Юшкевич

5545. О вычислении числа π Клавдием Птолемеем. Миланкович (О птолемајеву израчунавању броја π. Миланковић Милутин), Зб. радова Српска АН, 1953, **35**, № 3, 11—14 (сербск; резюме нем.)

Птолемей дает (см. немецкий перевод его книги Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie. Übersetzt von K. Manitius. Zwei Bände. Leipzig, Teubner, 1912, 1913) значение числа π в шестидесятиричных дробях

$$\pi = 3 + 8/60 + 30/3600,$$

что в десятичных дробях представляет

$$\pi = 3^{17}/_{120} = 3{,}141666\ldots$$

Этот результат является высшим достижением античной науки в данном вопросе Птолемей не указывает, как он пришел к нему.

Автор реферируемой статьи указывает, что Птолемей мог прийти к своему результату путем, который в символах современной математики характеризуется равенствами

$$2\pi r = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} 2nr \sin(180°/n)$$

или

$$\pi = \lim_{n\to\infty} n \sin(180°/n).$$

По таблице хорд Птолемея (см цитированную выш книгу, т. 1, стр. 36—40) отношение стороны много угольника с 360 сторонами к диаметру равно 1/120 × × (1 + 2/60 + 50/3600), откуда приближенное значени числа π есть $360/120 \cdot (1 + 2/60 + 50/3600) = 3^{17}/_{120}$.

И. Я. Депма

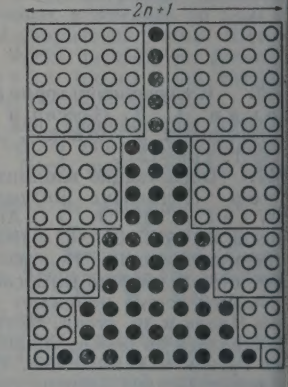
5546. Геометрия перспективы в эпоху Витрувия. Люс (Géométrie de la perspective à l'époque d Vitruve. Luce Jean-H.), Rev. histoire sci 1953, **6**, № 4, 308—321 (франц.)

Основываясь на изучении состояния теории перспективы в эпоху античного мира и на сопоставлении различных мест сочинения Витрувия «De Architectur Libri Decem», автор дает новое толкование двух неяс ных отрывков этого сочинения (см. Витрувий, Десят книг об архитектуре, перевод Ф. А. Петровского М., 1937, кн. 1, гл. 2, 2; кн. VII, вступл., 11) и пу тно критикует толкования других комментаторов.

А. С. Смогоржевски

5547. Математики древнего Китая и их достижения. Талантливый математик Шэнь Ко. Сюй Чунь фан (中國古代數學家及其成就. 多才多藝的數學家——沈括. 許蕊舫), 科學大衆 (Кэсюэ дачжун), 1953, № 1 416—418 (кит.)

Краткая биография выдающегося китайского г сударственного деятеля, инженера и разносторонне ученого Шэнь Ко (1030—1094). Основные труды Шэ Ко: «Мэн-си би тань» в 26 книгах (夢溪筆談, т. е. «Рассуждение Мэнси» (Мэн-си — третье имя Шэнь Ко)). «Бу би тань» в 2 книгах (補筆談 — «Добавления к рассуждениям»), «Сюй би тань» (續筆談 — «Продолжение рассуждений») и «Сю чен фаши» (修城法式 — «Способы строительства городских стен»).



В 18-й книге «Мэн-си би тань» изложен способ подсчета числа предметов, образующих кучу, которая имеет форму усеченной ступенчатой пирамиды, составленной из n прямоугольных слоев. Нижним основанием пирамиды служит слой из $A \cdot B$ предметов, верхним из $a \cdot b$ предметов; стороны промежуточных слоев обр зуют арифметические прогрессии с разностью 1. Шэ Ко определяет число предметов S по правилу, имею щему в наших обозначениях вид:

$$S = a \cdot b + (a+1) \cdot (b+1) + \ldots + (A-1) \cdot (B-1) + A \cdot B = n \cdot [a \cdot (2b + B) + A \cdot (2B + b) + (B - b)]/6.$$

Вывод пр вила Шэнь Ко не сообщает. Требуемое д вывода правило суммирования арифметической пр грессии в китайской математике было известно еще II в. до н. э.; правило суммирования натуральны квадратов также было известно в Китае до Шэнь К Выводы правил для вычисления сумм $\sum_1^n i^2$ и $\sum_1^n$ изложил в 1275 г. китайский математик Ян Хуэй, к

орый, однако, лишь передал методы более ранних ченых. Основаны эти выводы на наглядных геометрических представлениях. Удвоенная сумма арифметической прогрессии изображается параллелограммом из n слоев кружков; каждый слой содержит кружки в числе, равном сумме первого и последнего членов. Вывод суммы $S = \sum_1^n n^2$ Ян Хуэй приводит для $n = 5$, но по существу доказательство является общим. В основе лежат равенства $1^2 = 1, 2^2 = 1 + 3, 3^2 = 1 + 3 + 5, \ldots$, геометрическое представление которых очевидно. Число шаров, образующих пятислойную пирамиду с квадратным основанием, т. е. сумма $S = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 9$, изображается на чертеже симметрически расположенными черными кружками. Присоединив на чертеже справа и слева слои двух таких же пирамид, изображенные белыми кружками, получим прямоугольник, в котором число всех кружков, т. е. $3S$, равно $(2 \cdot 5 + 1) \cdot 5 \cdot 6/2$. В современных обозначениях

$$S = n \cdot 1 + (n-1) \cdot 3 + \ldots + 1 \cdot (2n-1)$$
$$2S = 2 \cdot n^2 + 2 \cdot (n-1)^2 + \ldots + 2 \cdot 1^2$$
$$3S = (2n+1) \cdot n + (2n+1) \cdot (n-1) + \ldots + (2n+1) \cdot 1 = (2n+1) \cdot n \cdot (n+1)/2.$$

Сюй Чунь-фан сообщает также, что в 1074 г. Шэнь Ко предложил заменить употребительный тогда лунный календарь некоторой разновидностью солнечного. Шэнь Ко были известны отклонение магнитной стрелки от меридиана и явление атмосферной рефракции солнечных лучей. Э. И. Березкина, А. П. Юшкевич

5548. Якопо Бароцци да Виньола в истории перспективы. У о л ч е р - К а з о т т и (Iacopo Barozzi da Vignola nella storia della prospettiva. Walcher Casotti Maria), Period. mat., 1953, **31**, ser. 4, № 2, 73—103 (итал.)

Сопоставляются теоретические работы знаменитого зодчего эпохи Возрождения Якопо Бароцци да Виньола — автора трудов о пяти орденах архитектуры и о двух правилах практической перспективы — с работами его непосредственных предшественников: Альберти — основоположника современной теории перспективы, Пиеро делла Франческо, Жана Пелерена, по прозванию Виатор, Луки де Бурго, Дюрера, Серлио, Коммандино и ряда других. Приводятся примеры перспективных построений некоторых из них, в том числе наиболее важные построения самого Виньолы.
А. С. Смогоржевский

5549. Ньютон. Мысли о человеке и его творчестве. А н д р а д е (Newton. Considérations sur l'homme et son oeuvre. Andrade E. N. da Costa), Rev. histoire sci., 1953, 6, № 4, 289—307 (франц.)

Текст доклада в Сорбонне 20 мая 1953 г. и основное содержание двух более ранних речей автора, произнесенных в связи с 300-летием со дня рождения И. Ньютона (1643—1727). Автор описывает жизненный путь Ньютона и характеризует его научное творчество, подробнее останавливаясь на работах по оптике и механике. Главный результат деятельности Ньютона, согласно автору, заключался в установлении мощи и универсальности методов количественного исследования. Известный афоризм Ньютона («я не строю гипотез») следует понимать в том смысле, что он отказывался от спекулятивных построений, следствия из которых нельзя сопоставить с опытными данными и применял гипотезы в современном смысле слова, контролируемые опытом.

Отмечаются некоторые моменты, сближающие воззрения Ньютона с современной наукой, например, ньютонова теория света, соединявшая корпускулярные идеи с волновыми, или его мысли об электрических и гравитационных свойствах мельчайших частиц вещества (на это указывал С. И. Вавилов в своей работе «Исаак Ньютон», М.—Л., 1943, 65, 150. *Прим. реф.*). Излагая «Математические начала», автор указывает, что данный здесь разбор проблемы движения в сопротивляющейся среде был первым исследованием по математической физике и гидродинамике.

Автор критикует мнение, что после 50 лет Ньютон утратил силу математического дарования, ссылаясь на поразительную скорость, с которой Ньютон в 1696 г. и 1716 г. решил предложенные ему трудные задачи анализа. Вместе с тем отмечается, что Ньютон много, кратно надолго отходил от научной работы и еще в расцвете лет (1679) высказывал желание «лучше и по-иному» использовать свое время; как известно, с середины 90-х гг. XVII в. великий ученый подавляющую часть своей энергии отдавал руководящей работе на Монетном дворе и богословско-историческим занятиям.
А. П. Юшкевич

5550. Первый известный портрет Ньютона [относящийся к 1669 г.]. Б р а ш (The first known portrait of Newton. Brasch Frederick E.), Scripta math., 1954, **20**, № 3—4, 224—225 (англ.)

5551. Исследования Энрико Бетти по теории Галуа в переписке Бетти с Либри. П р о ч и с с и (Gli studj di Enrico Betti sulla teoria di Galois nella corrispondenza Betti — Libri. Procissi Angelo), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, № 3, 315—328 (итал.)

В одном мемуаре 1851 г. итальянский математик Э. Бетти (1823—1892) дал первое полное доказательство ряда теорем Э. Галуа, которые сам Галуа не успел доказать с достаточной полнотой, в частности теоремы: для разрешимости неприводимого уравнения простой степени в радикалах необходимо и достаточно, чтобы все корни его рационально выражались через какие-либо два из них. Прочисси публикует письмо итальянского историка математики Г. Либри к Бетти от 2—3 декабря 1851 г., в котором выражается сомнение в справедливости названной теоремы Галуа, и ответ Бетти от 15 декабря 1851 г., содержащий разъяснение ошибок Либри, а также новый вариант доказательства теоремы.
А. П. Юшкевич

5552. Об интегральной теореме Коши — из истории развития теории функций. К о б о р и (Cauchy の積分定理について. 函數論史の一斷面. 小堀憲), 數學, Сугаку, 1953, **5**, № 3, 42—51 (япон.)

В первой части работы дается краткий обзор истории развития теории функций комплексного переменного за период от работ Лейбница и до работ Коши. Автор останавливается здесь на характеристике роли Лейбница, Иогана Бернулли, Даламбера, Эйлера, Клеро, Лапласа, Гаусса и Пуассона. Во второй части работы автор приводит рассуждения Коши, связанные с доказательством интегральной теоремы.

Далее автор отмечает заслуги Гурса, давшего хорошо известное доказательство интегральной теоремы Коши, предполагающее только, что функция $f(z)$ имеет в каждой точке области D производную $f'(z)$, и не требующее заранее ее непрерывности. В заключение автор довольно подробно излагает содержание исследований Артина по распространению интегральной теоремы Коши для случая более общих контуров, чем обычно рассматриваемых — замкнутых спрямляемых кривых (см. Artin E., On the theory of complex functions, Notre Dame, Lectures, 1944, № 4).

Библиография, 32 названия.

Примечание референта. Автор, касаясь работ Леонарда Эйлера, останавливается лишь на работах, относящихся к 1777 г., не упоминая о более ран-

них его работах. Так, первая формулировка условий, при которых выражение $Pdx+Qdy$ есть полный дифференциал, приписывается автором полностью Клеро и относится к статье, написанной в 1743 г., в то время как по утверждению автора у Эйлера эти условия появляются лишь в 1777 г. В действительности же эти условия впервые были получены Эйлером в работе, сданной в печать в 1734 г. (см. Маркушевич А. И., Очерки по истории теории аналитических функций, М.— Л., Гостехиздат, 1951). Точно так же автор приписывает всецело Лапласу первое использование комплексных чисел при вычислении интегралов функций действительного переменного, хотя, как известно (см. цит. выше книгу), и в этом вопросе приоритет принадлежит Эйлеру. Автор не упоминает также о работах Д. Е. Меньшова, Г. П. Толстова и др., касающихся затронутых в работе вопросов. Г. Ц. Тумаркин

5553. **Об обращении эллиптических интегралов (к столетию со дня рождения профессора математики Давида Эмануэля). Миллер** (Despre inversiunea integralelor eliptice. Myller A.), Gaz. mat. şi fiz., 1953, **5**, № 12, 535—538 (рум.)

Популярная заметка, в которой коротко рассказывается об изучении эллиптических интегралов и функций и сообщается, что к этой области математики относились работы профессора Бухарестского университета Давида Эмануэля. И. Я. Депман

5554. **Труды Анри Пуанкаре в области электротехники. Дарьё** (Contributions diverses d'Henri Poincaré à l'électrotechnique. Darrieus G.), Mém. Soc. ingrs civils France, 1954, **107**, № 3, 213—216 (франц.)

5555. **Абраам де-Муавр** (1667—1754) (Abraham de Moivre (1667—1754), Nature, 1954, **174**, № 4438, 950—951 (англ.)

5556. **Карл Фридрих Гаусс (К 100-летию со дня смерти). Башмакова И. Г.,** Наука и жизнь, 1955, № 3, 53—54

5557. **Стефан Банах (1892-1945). Куратовский** (Stefan Banach (1892—1945). Kuratowski Kazimierz), Roczn. Towarz. nauk. warszawskiego, lata XXXI—XXXVIII (1938—1945), Warszawa, 1954, 167—168 (польск.)

Биографические сведения и краткий обзор научно-общественной деятельности известного польского математика С. Банаха.

5558. **Некролог Диксона. Монтель** (Notice nécrologique sur Léonard Eugène Dickson. Montel Paul), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 25, 1741—1742 (франц.)

Некролог известного математика Диксона — специалиста в области теории групп и теории чисел (1874—1954).

5559. **Всеволод Иванович Романовский (Некролог). Сарымсаков Т. А.,** Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 79—88

Некролог известного советского математика В. И. Романовского (РЖМат, 1955, 2514). Приложен список трудов (159 названий).

5560. **Проф. Карсло. (Некролог). Рум** (Prof. H. S. Carslaw. Obituary. Room T. G.), Nature, 1953, **175**, № 4446, 105—106 (англ.)

5561. **Памяти Жерме. Брюнье** (In memoriam R. H. Germay. Bruwier L.), Mathesis, 1954, **63**, № 6—8, 268—270 (франц.)

Некролог бельгийского математика Жерме (1894—1954).

5562. **Перечень опубликованных работ проф. Жерме** (Liste des publications de R. H. Germay), Bull. Soc. roy. sci., Liège, 1954, **23**, № 9—10, 340—359 (франц.)

5563 К. **История науки. Античная наука на протяжении золотого века Греции. Сартон** (A history of science. Ancient science trough the golden age of Greece. Sarton G., Oxford University Press, 1953, XXVI + 646 p., 63 s. (англ.

5564 К. **Квадратура круга. Халилов** (Даиренин квадратурасы. Хәлилов З. И.). Баку, Изд-во АН АзербССР, 1954, 63 стр., 1 руб.), (азерб.)

Популярное изложение задачи о квадратуре круга. В гл. I «Краткая история числа π» — приводится исторический обзор вопроса с древнейших времен до XVIII в. в основном по статье Ф. Рудио в сборнике «Квадратура круга» (М.— Л., ГТТИ, 1934). В гл. II—«Задача о квадратуре круга» — показывается, что с помощью циркуля и линейки не могут быть построены отрезки с трансцендентным отношением. В гл. III — «Невозможность квадратуры круга» — доказывается трансцендентность числа π. В гл. IV —«Достижения советских математиков в области трансцендентных чисел» — после краткой характеристики развития теории трансцендентных чисел в XIX в. излагаются результаты А. О. Гельфонда в этой области. В двух приложениях приводятся необходимые сведения по теории рядов для читателя, незнакомого с этой теорией. Книга написана хорошим языком и доступна широкому кругу читателей.

Автор в своем историческом обзоре не останавливается на истории развития вопроса о квадратуре круга и понятия о числе в работах ученых восточных народов, исключив даже то, что по этому поводу сказано у Ф. Рудио. Б. А. Розенфельд

5565 К. **Математические принципы натуральной философии. Ньютон** (Philosophiae naturalis principia mathematica. Newton Is. (Facsimile of the first edition), London, Wm. Dawson and Sons, Ltd., 1953, VIII, 511 p., 84 s. (англ.)

См. также: 5509, 5566

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

5566. **Влияние геометрии Бойаи — Лобачевского на развитие аксиоматического метода. Калмар** (A Bolyai — Lobacsevszkij-féle geometria hatása az axiómatikus módszer fejlödésére. Kálmár László), A magyar tudoman. akad. mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, **3**, № 2, 235—242 (венг.)

Обзорный доклад, прочитанный на торжественном заседании Венгерской Академии Наук, посвященном 150-летию со дня рождения Яноша Бойаи.

Отмечается, что работы Лобачевского и Бойаи привели к возникновению основных понятий аксиоматического метода: модель, непротиворечивость, независимость, полнота. Кратко излагается суть этих понятий и связанных с ними результатов Гильберта, Гентцена, Новикова, Гёделя, Сколема.

Говоря о том, что Бойаи, установив осуществимость евклидовой планиметрии на орисфере, по существу, дал первое применение метода модели, автор не указал, что этот же важнейший результат был получен и Лобачевским. В. Ф. Рогаченко

5567. **Продуктивные множества. Деккер** (Productive sets. Dekker J. C. E.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **78**, № 1, 129—149 (англ.)

Исследуются множества, эффективно отличимые отрекурсивно перечислимых множеств (РПМ); обобщаются и уточняются результаты Поста о креативных множе-

твах (Post, Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 284—316; м. также РЖМат, 1954, 2492).

Пусть $g_n(x)$ — частичнорекурсивная функция (ЧРФ), универсальная для всех ЧРФ, и ω_n—РПМ (возможно пустое) всех значений функции g_n. Каждой ЧРФ сопоставляются множества γ и χ:

$$y \in \gamma(f) = {}_{Df}(Ex)[f(x) = y \,\&\, y \in \omega_x],$$
$$y \in \chi(f) = {}_{Df}(Ex)[f(x) = y \,\&\, y \notin \omega_x].$$

Определения: Общерекурсивная функция (ОРФ) называется регулярной, если $\gamma(f) \cap \chi(f)$ пусто. Множество α называется вполне продуктивным (ВПМ), если существует ОРФ $f(n)$ такая, что для всех n:

$$f(n) \in (\alpha \setminus \omega_n) \cup (\omega_n \setminus \alpha). \qquad (1)$$

При этом говорят, что α — ВПМ относительно f и f — ВПФ множества α.

Теорема 1.1. Для того чтобы α было ВПМ с ВПФ f, необходимо и достаточно, чтобы f была регулярной функцией, причем $\chi(f) \subset \alpha \subset$ дополнение к $\gamma(f)$.

Следствия: а) Существует $\aleph$ различных ВПМ. б) Каждое бесконечное РПМ можно разложить на креативное множество и ВПМ.

Теорема 1.2. Натуральный ряд можно разложить на k попарно не пересекающихся ВПМ ($k = 2, 3, \ldots, n, \ldots : \aleph_0$).

Определения. Множество α называется продуктивным (ПМ) соответственно контрапродуктивным (КПМ) или полупродуктивным (ППМ), если существует ЧРФ $p(n)$ такая, что для всех n:

$$\omega_n \subset \alpha \to \begin{cases} (1)\ p(n) \text{ определена,} \\ (2)\ p(n) \in \alpha \setminus \omega_n \text{ (в случае (ПМ);} \end{cases}$$

соответственно

$$\alpha \subset \omega_n \to \begin{cases} (1)\ p(n) \text{ определена} \\ (2)\ p(n) \in \omega_n \setminus \alpha \text{ (в случае КПМ)} \end{cases}$$

или

$$\omega_n \subset \alpha \to \begin{cases} (1)\ p(n) \text{ определена} \\ (2)\ \omega_n \subset_+ \omega_{p(n)} \subset \alpha \text{ (в случае ППМ);} \end{cases}$$

здесь $\subset_+$ — знак строгого включения.

При этом $p(n)$ называется П (соответственно КП или ПП) функцией для α.

Обозначим через $K_{ВП}$, $K_{П}$, $K_{КП}$, $K_{ПП}$ классы ВП, соответственно П, КП, ПП множеств. Имеют место включения:

$$K_{ВП} \subset K_{П} \subset K_{ПП}.$$

Ссылаясь на неопубликованную теорему Майхилла, автор сообщает без доказательства, что:

$$K_{ВП} = K_{П} \subset K_{КП}.$$

Строится пример ППМ, не являющегося ни ПМ, ни КПМ. Следовательно, $K_{ПП} \not\subset K_{П}$; $K_{ПП} \not\subset K_{КП}$.

Определение. Продуктивным центром (ПЦ) множества α относительно его ПФ $p(n)$ (обозначается $\pi(\alpha, p)$) называется множество всех значений функции $p(n)$, когда $\omega_n \subset \alpha$.

Аналогично определяется понятие КП центра для КП множества.

Теоремы 2.3 и 3.2 утверждают: Всякое ПМ (КПМ) имеет в точности $\aleph_0$ различных центров и $\aleph_0$ различных ПФ (соответственно КПФ).

Строятся примеры множеств, имеющих счетное множество попарно пересекающихся центров.

Теоремы 2.11 и 3.7 утверждают: Среди всех множеств, для которых данная ЧРФ $p(n)$ является ПФ (КПФ), имеется наименьшее (наибольшее), которое совпадает со своим центром (с дополнением своего центра) отоносительно функции $p(n)$. Пусть ОРФ отображает множество α в β и дополнение к α в дополнение к β. Если α является ПМ (ВПМ, КПМ, ППМ), то таковым будет и β. Б. А. Трахтенброт

5568. **Конечнозначные исчисления высказываний Лукасевича. Ассер** (Die endlichwertigen Łukasiewiczschen Aussagenkalküle. Asser Günter), Ber. Mathematiker-Tagung, Berlin, 1953, 15—18 (нем.)

Под конечнозначным исчислением высказываний Лукасевича подразумевается $(n+1)$-значная матрица $L_{\Omega}^{(n}$ с одним выделенным значением W и множеством основных операций Ω, содержащим операцию импликации Г:

Г	W	F_1	F_2	$\ldots$	F_{n-1}	F_n
W	W	F_1	F_2	$\ldots$	F_{n-1}	F_n
F_1	W	W	F_1	$\ldots$	F_{n-2}	F_{n-1}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
F_{n-1}	W	W	W	$\ldots$	W	F_1
F_n	W	W	W	$\ldots$	W	W

(W — выделенное значение матрицы, $F_1, \ldots, F_n$ — невыделенные ее значения). Кроме операции Г, рассматривается операция отрицания N. Для трехзначного исчисления она определяется таблицей:

N	W	F_1	F_2
	F_2	F_1	W

а для $(n+1)$-значного — аналогичной таблицей. Наличие операции N в исчислении Лукасевича, в отличие от операции Г, не обязательно.

Рассматривается вопрос об аксиоматизируемости исчислений Лукасевича. Работа носит обзорный характер. Сначала приводятся ранее опубликованные результаты.

1) Вайсберг (Wajsberg M., C. r. Soc. sci. Lettres Varsovie Cl. III, 1931, 24, 126—148) показал аксиоматизируемость $L_{\{\Gamma,N\}}^{(n)}$ при простом n.

2) Шрётер (Schröter K., Forsch. Log. Grundl. exakt-Wiss., n. F., Heft 8, Leipzig, 1943) показал аксиоматизируемость двузначного исчисления Лукасевича с произвольным конечным множеством операций. Отмечается, что метод Шрётера дает возможность построить (трансфинитную) систему аксиом и в том случае, когда множество Ω бесконечно.

3) Россер и Тэркуетт (Rosser J. B., Turquette A. R., J. Symbolic Logic, 1945, 10, 61—82) показали аксиоматизируемость всех $L_{\{\Gamma,N\}}^{(n)}$.

Основная идея Вайсберга состоит в сведении множества всех тождественно истинных формул к множеству тождественно истинных формул с одной переменной. Метод Шрётера является обобщением метода Вайсберга.

Утверждение Ассера состоит в том, что вопрос об аксиоматизируемости произвольного $L_{\Omega}^{(n)}$ можно решить аналогичным методом: путем сведения множества всех тождественно истинных формул к множеству тождественно истинных формул с n переменными (автор отмечает, что дальнейшие существенные редукции невозможны). Таким образом, вопрос об аксиоматизируемости конечнозначных исчислений Лукасевича принципиально разрешен положительно. Остается, однако, открытым вопрос о том, как для конкретного исчисления Лукасевича построить наиболее обозримую (übersichtliches) систему аксиом. Доказательства своих результатов автор обещает опубликовать в последующей работе. Б. Ю. Пильчак

5569. **Некоторые системы аксиом для исчисления высказываний. Мо Шао-куй** (命題演算的公理

系統.莫紹揆), 數學學報 (Шусюэ сюэбао—Acta math. sinica), 1955, 5, № 1, 117—135 (кит., резюме англ.)

Даются системы аксиом для классического, интуиционистского и минимального исчислений высказываний, причем каждая из этих систем распадается на группы, соответствующие логическим связкам, таким образом, что если некоторая формула доказуема, то доказательство может быть дано с помощью аксиом только тех групп, которые соответствуют связкам, встречающимся в данной формуле.

Доказывается, что присоединение аксиомы $CCCpqpp$ (т. е. $((p\to q)\to p)\to p$) к интуиционистской системе превращает ее в классическую, с сохранением описанного выше свойства групп аксиом. Дается условие, при котором можно объединять некоторые аксиомы вида $C\alpha\beta$ в одну аксиому. А. С. Есенин-Вольпин

5570. К определению примитивно рекурсивных функций. Мо Шао-куй (原始遞歸函數的定義.莫紹揆), 數學學報, (Шусюэ сюэбао — Acta math. sinica), 1955, 5, № 1, 109—115 (кит.; резюме англ.)

Продолжая работы Р. Петер (Péter R., Math. Ann., 1934, 110, 612—632) и Р. Робинсона (Robinson R. M., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 925—942) автор дает некоторые способы определения понятия примитивно рекурсивной функции, в каждом из которых участвует только одна схема (и несколько первоначальных функций). А. С. Есенин-Вольпин

5571. Абстрактные множества и основания математического анализа. Вьола (Gli insiemi astratti e i fondamenti dell'analisi matematica. Viola Tullio), Archimede, 1954, 6, № 6, 219—228 (итал.)

Общие соображения в связи с работами ряда известных исследователей по основаниям математики на базе теории множеств. Аксиоматическая теория множеств не излагается. Новых теорем статья не содержит. А. С. Есенин-Вольпин

5572. Критические замечания к исследованиям оснований математики. Сколем (A critical remark on foundational research. Skolem Thoralf Albert), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 408—409 (англ.)

Ставится вопрос, считать ли первичным в математике теорию множеств или математическую логику. Приводятся основания и возражения относительно первичности как теории множеств, так и математической логики. Т. Л. Майстрова

5573 К. Рекурсивные функции. Петер Р. (Перев. с нем.; редакция и предисловие А. Н. Колмогорова). М., Изд-во ин. лит. 1954 г., 164 стр., 11 р. 15 к.

Примитивно рекурсивным функциям (ПРФ) посвящены §§ 1—8, общерекурсивным (ОР) — §§ 9—20, приложениям и истории — §§ 21—24. Частично рекурсивные функции (ЧРФ) не рассматриваются; они упоминаются лишь в связи с понятием эффективного трансфинита (§ 21, п. 12). Понятие рекурсивной операции не определяется и не исследуется систематически; однако фактически оно использовано в виде «рекурсий высших ступеней» (§ 13) и «функции ПР над данными функциями» (§ 10, п. 6).

Примитивно-рекурсивные функции.

В § 1 приводятся рекурсивные схемы, определяющие основные теоретико-числовые функции и предикаты: сумму, произведение, степень, разность (арифметическую), частное и остаток, сумму и произведение с переменным числом слагаемых и множителей, биномиальные коэффициенты, предикат «быть простым числом» и т. д.

В § 2 дается определение ПР функции и показывается, что рассмотренные в § 1 функции являются ПР. Устанавливается примитивная рекурсивность операций алгебры логики, ограниченных кванторов и ограниченного μ (наименьшее число, не превосходящее n, кото рое...). Дается таблица наиболее употребительны ПРФ.

В §§ 3—6 показывается, что к примитивно рекурсив ным схемам сводятся и следующие более общего вид рекурсии:

1) Возвратная рекурсия: значение функции f в точк $n+1$ вычисляется через значения функции в прои вольном количестве предшествующих точек.

2) Одновременная рекурсия, при которой определя ются совместно функции $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$:

$$\sigma_1(0, a) = \alpha_1(a),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma_k(0, a) = \alpha_k(a),$$
$$\sigma_1(n+1, a) = \beta_1(n, a, \sigma_1(n, a), \ldots, \sigma_k(n, a)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma_k(n+1, a) = \beta_k(n, a, \sigma_1(n, a), \ldots, \sigma_k(n, a)).$$

3) Рекурсия, при которой производится подстановка некоторой функции на место параметра:

$$\varphi(0, a) = \alpha(a),$$
$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, \gamma_1(n, a)), \ldots, \varphi(n, \gamma_k(n, a))).$$

4) Многократная рекурсия, т. е. рекурсия по многим переменным, например, по двум:

$$\varphi(0, n) = \alpha_1(n); \quad \varphi(m+1, 0) = \alpha_2(m);$$
$$\varphi(m+1, n+1) = \beta(m, n, \varphi(m, \gamma(m, n)), \varphi(m+1, n)).$$

В § 7 излагаются следующий результат Робинсона (Robinson R., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 925—942; 1948, 54, 987—993). Пусть quadres (n) — расстояние n до ближайшего полного квадрата $\leqslant n$, quad (n) — предикат «n есть полный квадрат». Тогда из исходных функций $n+1$ и quadres (n) (или $n+1$ и quad (n)) можно получить все ПРФ, применяя в конечном числе следующие определяющие схемы:

$$\varphi(n) = \alpha(n) + \beta(n), \quad \varphi(n) = \beta[\alpha(n)], \quad \varphi(n) = \beta^n(0);$$

соотсветственно

$$\varphi(n) = |\alpha(n) - \beta(n)|, \quad \varphi(n) = \beta|\alpha(n)|, \quad \varphi(n) = \beta^n(0),$$

где α, β — ранее определенные функции, $\varphi(n) = \beta^n(0)$ — сокращенная запись схемы итерации:

$$\varphi(0) = 0,$$
$$\varphi(n+1) = \beta[\varphi(n)].$$

В § 8 элементарные функции определяются как «функции, получающиеся из неотрицательных чисел и из переменных с помощью конечного числа сложений, арифметических вычитаний и делений и построений сумм и произведений» (постоянного или переменного числа слагаемых или множителей). Основной результат, принадлежащий Берецкой (I. Bereczki): Класс ПРФ шире класса элементарных функций; именно, итерация возведения в степень является ПРФ, растущей быстрее любой элементарной.

Общерекурсивные функции.

Рассматриваются следующие рекурсивные схемы, выводящие из класса ПРФ:

1) k-кратная рекурсия со вставками (§§ 9—11) характеризуется тем, что в определяющих равенствах могут фигурировать подстановки («вставки») определяемой функции ψ на места аргументов этой же функции ψ. Такова двукратно рекурсивная функция ψ, растущая быстрее любой ПРФ (§ 9):

$$\psi(0, n) = n+1; \quad \psi(m+1, 0) = \psi(m, 1);$$
$$\psi(m+1, n+1) = \psi(m, \psi(m+1, n)).$$

вукратная функция $\varphi(m, n)$, универсальная для всех одноместных ПРФ (§ 11), и $(k+1)$-кратная функция, универсальная для всех k-кратных функций (§ 11).

2) Трансфинитная рекурсия (§ 12): значение определяемой функции $f(n)$ вычисляется через значения этой же функции f для аргументов $< n$, где отношение $<$ вполне упорядочивает натуральный ряд по некоторому порядковому типу ξ. k-кратная рекурсия и трансфинитная рекурсия по типу ω^k сводимы одна к другой. Трансфинитная рекурсия по типу ω^ω выводит за пределы класса многократно рекурсивных функций.

3) Рекурсии высших ступеней (§§ 13—15) определяют функции от функции. Пример: n-кратную итерацию функции $f(n)$ в точке a можно определить как функцию от функции $B_x(n, a, f(x))$ посредством рекурсии второй ступени:

$$\begin{cases} B_x(0,\ a, f(x)) = a, \\ B_x(n+1, a, f(x)) = f(B_x(n, a, f(x))). \end{cases}$$

Пусть $V_{x_1 x_2 \ldots x_k}(n_1, \ldots, n_k, f(x_1, \ldots, x_k))$ — функция от функции, сопоставляющая функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ и набору чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ значение $f(n_1, \ldots, n_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Функции, которые можно построить из 0, $n+1$ и основных функций от функций $V_{x_1 \ldots x_k}$ посредством примитивных рекурсий и подстановок называются ПРФ второй ступени: все такие функции могут быть определены как многократные рекурсивные функции первой ступени (не являющиеся, вообще говоря, ПРФ). Сведение рекурсии второй ступени к многократной рекурсии первой ступени осуществимо также методом «геделизации» формального процесса вычисления (§ 15).

В § 16 дается обычное определение общерекурсивной функции и отмечается, что все рассмотренные ранее специальные виды рекурсии задают ОРФ. Далее выводится явное представление ОРФ формулой Клини (§ 17):

$$\psi[\mu_w(\tau(n, a_1, \ldots, a_k, w) = 0)]$$

и доказывается теорема Маркова о том, что функции большого размаха и только они могут служить универсальными ψ в этом представлении (§ 18).

В § 20 описывается машина Тьюринга и доказывается общая рекурсивность функций, эффективно вычислимых по Тьюрингу.

Приложения и история.

В обзорном порядке излагаются программа Гильберта по обоснованию математики и результаты Гёделя; выясняются некоторые проблемы интуиционизма и определяются эффективные трансфинитны (§ 21).

Устанавливается невозможность алгоритма: 1) для распознавания систем равенств, которые определяют общерекурсивные функции (§ 22), 2) для решения арифметических проблем с одним свободным переменным (§ 23).

Из приложений к анализу приводятся понятия рекурсивной сходимости и рекурсивного действительного числа, по Шпеккеру, и доказывается теорема Шпеккера о существовании монотонной ограниченной примитивно рекурсивной последовательности рациональных чисел, не являющейся эффективно сходящейся (§ 24).

В § 11 устанавливается связь между примитивной рекурсивностью функций $[\tau n]$ и a_n — коэффициента ряда $\tau = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i/i!)$, где все a_i — целые $\geqslant 0$; связанные с этим вопросы рассматриваются в §§ 21 и 24.

В предисловии редактора разъясняется смысл требований конструктивности в современной математике и указывается значение теории рекурсивных функций для «конструктивистской» математики. В § 2 предисловия поясняется точный смысл понятий ОРФ и ЧРФ; в § 3 подчеркивается, что интуиционистская логика не связана с философией интуиционизма, она упорядочивает приемы, употребляемые при сведении решения одних конструктивных задач к решению других конструктивных задач (Колмогоров А. Н., Math. Z., 1932, 35, 58—65).

Редактор отмечает непоследовательность автора в освещении тезиса об эквивалентности вычислимости и общей рекурсивности (следует учесть опечатку: на стр. 8, строка 22 сверху, надо читать § 20 вместо § 21).

В русское издание внесен ряд изменений, указанных автором. Библиография (всего — 99 названий) дополнена редактором. Имеются опечатки. Б. А. Трахтенброт

См. также: 5538 К, 5681, 5682

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

5574. О разности $\pi(x) - \mathrm{li}\, x$. (II). Скьюз (On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}\, x$. (II). Skewes S.), Proc. London Math. Soc., 1955, 5, № 17, 48—70 (англ.)

Рассматривается вопрос о вычислении верхней границы X того значения $x < X$, при котором происходит первое изменение знака разности $d(x) = \pi(x) - \mathrm{li}\, x$ с минуса на плюс. Продолжение работы автора (J. London Math. Soc., 1933, 8, 277—83), где X вычисляется в предположении справедливости гипотезы Римана для $\zeta(s)$. (Там было получено $X = 10^{10^{10^{34}}}$).

В настоящей работе производится вычисление X в предположении некоторой гипотезы (H), являющейся более слабой, чем гипотеза Римана, а также и без гипотез. Результаты:

$$X_H = \exp\exp\exp(7{,}703),$$

$$X = 10^{10^{10^{10^3}}}.$$

(H) Для любого нуля $\zeta(s)$ $\rho = \beta + i\gamma$, для которого $|\gamma| < X_н^3$, выполняется неравенство $\beta - 1/2 \leqslant \leqslant X_н^{-3} \log^{-2} X_н$.

В. М. Архангельская

5575. О разности между последовательными простыми числами. Риччи (Sur la différence entre nombres premiers consécutifs. Ricci Giovanni), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 56—57 (франц.)

Последовательность $\{n_h\}$ натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots$ называется последовательностью с асимптотической плотностью, равной нулю, если $\lim h/n_h = 0$. Последовательность $\{x_n\}$ называется квази-асимптотической к последовательности $\{a_n\}$ (пишется $x_n \backsim a_n$), если существует последовательность $\{n_h\}$ с асимптотической плотностью, равной нулю, такая, что для каждого

$\varepsilon>0$ $(1-\varepsilon)\,a_n<x_n<(1+\varepsilon)\,a_n$ при $n\geqslant n_0(\varepsilon)$, $n\neq n_h$. $p_1<p_2<\ldots$ — последовательность всех простых чисел.

Теорема 1 утверждает, что не существует монотонной функции $\psi(n)$ такой, что $p_{n+1}-p_n\sim\psi(n)$.

В теореме 2 рассматриваются числа α и β $(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant\infty)$ такие, что последовательности a_n и b_n, где $a_n=\alpha\log p_n$, $b_n=\beta\log p_n$, обладают следующими свойствами: 1) Существует последовательность $\{n_h\}$ с асимптотической плотностью, равной нулю, такая, что для каждого $\varepsilon>0$ $(1-\varepsilon)\,a_n<p_{n+1}-p_n<(1+\varepsilon)\,b_n$ при $n\geqslant n_0(\varepsilon)$, $n\neq n_h$. 2) Такая последовательность $\{n_h\}$ не существует, если взять неравенства $(1+\varepsilon)\,a_n<p_{n+1}-p_n<(1+\varepsilon)\,b_n$, $(1-\varepsilon)\,a_n<p_{n+1}-p_n<(1-\varepsilon)\,b_n$. Даются оценки α и β, из которых вытекает, что $\alpha\leqslant 15/16$, $\beta-\alpha\geqslant 1/8$.

Доказательства не приведены. А. А. Бухштаб

5576. О поведении разности последовательных простых чисел. Риччи (Sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi. Ricci Giovanni), Riv. mat. Univ. Parma, 1954, 5, № 1—3, 3—54 (итал.)

Пусть p_n — n-е простое натуральное число, $0<\delta\leqslant 1$, $0\leqslant\mu<\lambda\leqslant\infty$. Обозначим через $D_\delta(\xi;\mu,\lambda)$ число натуральных n, для которых $\mu\ln p_n<p_{n+1}-p_n\leqslant\lambda\ln p_n$, $(1-\delta)\,\xi<p_n\leqslant\xi$, а через $S_\delta(\xi,\mu,\lambda)$ — сумму разностей последовательных простых чисел $p_{n+1}-p_n$, распространенную на те же n.

Рассматривается главным образом поведение функций $D_\delta(\xi;\mu,\lambda)$, $S_\delta(\xi,\mu,\lambda)$ и ряда других с ними связанных функций при различных предположениях относительно ξ, μ, λ. Некоторые из полученных результатов:

1. При $\xi\to\infty$

$$D_\delta(\xi;\mu,\lambda)\leqslant\frac{C_\delta(\mu,\lambda)}{2H}(\lambda-\mu)\,\frac{\delta\xi}{\ln\xi}+o\left(\frac{\delta\xi}{\ln\xi}\right),$$

где $H=\prod_{p\geqslant 3}\{1-1/(p-1)^2\}$, а $C_\delta(\mu,\lambda)$ определяется следующим образом. Пусть $Z_\delta(\xi;2a)$ — число всех n, удовлетворяющих условиям: $p_{n+1}-p_n=2a$ $(2a\geqslant 2$ — четное$)$, $(1-\delta)\,\xi<p_n\leqslant\xi$, $\Phi(2a)=\prod_{3\leqslant p\mid a}[(p-1)/(p-2)]$, $z_\delta(\xi;\ 2a)=Z_\delta(\xi;\ 2a)\,\Phi^{-1}(2a)\ln^2\xi/(\delta\xi)$. Тогда $C_\delta(\mu,\lambda)=\limsup z_\delta(\xi;2a)$, где предел берется при $\xi\to\infty$, $\mu\ln\xi<2a\leqslant\lambda\ln\xi$.

2. Для всякого $\varepsilon>0$ и достаточно больших ξ

$$D_\delta(\xi;\ 0,\lambda)>(8\lambda-4\sqrt{4\lambda^2+1}-\varepsilon)\,\delta\xi/\ln\xi,$$

а при $\lambda\geqslant(15+2\varepsilon)/16\varepsilon$

$$D_\delta(\xi;\ 0,\lambda)>(1-\varepsilon)\,\delta\xi/\ln\xi.$$

И. П. Кубилюс

5577. Распределение целых чисел, свободных от квадрата, в малых интервалах. Белман, Шапиро (The distribution of square-free integers in small intervals. Bellman Richard, Shapiro Harold N.), Duke Math. J., 1954, 21, № 4, 629—637 (англ.)

Исследуется вопрос об определении монотонной функции $\varphi(x)$, для которой промежуток $(x,\ x+\varphi(x))$ всегда содержит целое число, свободное от квадрата.

Доказывается следующее:

[1] Если $\varphi(x)$ — любая функция, для которой $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$, то для «почти всех» n промежуток $(n,\ n+\varphi(x))$ содержит число, свободное от квадрата. (Термин «почти все» здесь означает, что число тех $n\leqslant x$, для которых промежуток $(n,\ n+\varphi(n))$ не содержит бесквадратного числа, оценивается как $o(x)$.)

[2] Если $\varphi(x)$ — строго монотонная функция, для которой $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$, то число $Q(n,\ n+\varphi(n))$ бесквадратных чисел промежутка $(n,\ n+\varphi(n))$ удовлетворяет неравенству

$$(1-\varepsilon)\,6\pi^{-2}\varphi(n)<Q(n,\ n+\varphi(n))<(1+\varepsilon)\,6\pi^{-2}\varphi(n),\quad(1)$$

которое выполняется для «почти всех» достаточно больших n при любом $\varepsilon>0$.

[3] Если $k(n)$ — любая функция, для которой $\lim_{n\to\infty}k(n)=\infty$, а $\varphi(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$,

(b) $\varphi(x)=O(x^{1/12-\delta})$ для любого малого $\delta>0$,

(c) $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\,\varphi(x)/\varphi(\lambda x)<\infty$ для некоторого λ, $0<\lambda<1$,

то $Q(n,\ n+\varphi(n))$ удовлетворяет неравенству:

$$6\pi^{-2}\varphi(n)-k(n)\sqrt{\varphi(n)}\leqslant Q(n,\ n+\varphi(n))\leqslant 6\pi^{-2}\varphi(n)+k(n)\sqrt{\varphi(n)},\quad(2)$$

которое выполняется для «почти всех» достаточно больших n. (Справедливость [2] и [3] для «почти всех» n означает, что число тех $n\leqslant x$, для которых неравенства (1) и (2) не выполняются, оценивается как $o(x)$.) Доказательство [1] и [2] основано на известных оценках $Q(x)$ — числа бесквадратных чисел $\leqslant x$:

$$Q(x)=6\pi^{-2}x+O(\sqrt{x}),$$

$$Q(x)=6\pi^{-2}x+o(\sqrt{x}),$$

[3] является уточнением [2], доказательство получено с помощью методики Турана и Карлица (Turán P. J. London Math. Soc., 1934, 9, 274—276; Carlitz L., Quart. J. Math., 1932, 3, 273—290). В. М. Архангельская

5578. О произведении величин $L(1,\chi)$. Татудзава (On the product of $L(1,\chi)$. Tatuzawa Tikao), Nagoya Math. J., 1953, 5, Febr., 105—111 (англ.)

Доказываются два неравенства

$$c(\varepsilon)k^{-\varepsilon}<\Big|\prod_{\chi\neq\chi_0}L(1,\chi)\Big|<\exp(c(\log\log k+\omega(k))),\quad(1)$$

$$c(\varepsilon)\,k^{-\varepsilon}<\Big|\prod_{\chi(-1)=-1}L(1,\chi)\Big|<\exp(c(\log\log k+\omega(k))),\quad(2)$$

где χ пробегает все характеры $\bmod k$, кроме главного, в произведении (1), а в (2) χ пробегает только те характеры, для которых $\chi(-1)=-1$; $\omega(k)$ — число простых делителей k; $c(\varepsilon)$ — постоянная, входящая в известную теорему Зигеля. Кроме того, показывается, что

$$c(\varepsilon)\,\delta(l)\,l^{-\varepsilon}<Rh<\delta(l)\,(\log l)^c,$$

где l — нечетное простое; h и R — соответственно число классов и регулятор поля $\Omega=P(\zeta)$, $\zeta^l=1$, P — поле рациональных чисел, $\delta(l)=2\,[l\,(2\pi)^{-l/2}]^{l-1}$. Аналогичные оценки получены и для hh_0^{-1}, где h_0 — число классов поля $P(\zeta+\zeta^{-1})$.

Доказательство базируется на оценке сверху величины $\pi(x,\ k,\ l)$ по методу Бруна и на теореме Зигеля об исключительном нуле L-функций. Н. Г. Чудаков

5579. Эквивалентность двух гипотез в теории чисел. Бейтман, Човла (The equivalence of two conjectures in the theory of numbers. Bateman P. T., Chowla S.), J. Indian Math. Soc., 1953, 17, № 4, 177—181 (англ.)

Высказывается гипотеза, что $\sum_{\nu=1}^{n}\lambda(\nu)/\nu>0$ для всех $n\geqslant 1$. Здесь $\lambda(\nu)$ — функция Лиувилля $(\lambda(\nu)=(-1)^{\rho(\nu)}$, $\rho(\nu)$ — число простых делителей ν, считая кратность).

Из этой гипотезы следовала бы гипотеза Римана для ζ-функции Римана и простота нулей $\zeta(s)$. Указанная гипотеза эквивалентна другой гипотезе: $\Sigma_{\nu=1}^{n} \chi(\nu)/\nu > 0$, где $n \geqslant 1$ — любое, а χ — реальный характер Дирихле. Доказывается также теорема, сообщенная авторам устно Шоуолтером: если $\chi(n)$ — вполне мультипликативная арифметическая функция, принимающая значение 1,0 или -1, и $\chi(1) = 1$, и если $\Sigma_{\nu=1}^{n} \lambda(\nu)/\nu > 0$ при $n \leqslant N$, то $\Sigma_{\nu=1}^{n} \chi(\nu)/\nu \geqslant \Sigma_{\nu=1}^{n} \lambda(\nu)/\nu$. Неравенство $\Sigma_{\nu=1}^{n} \lambda(\nu)/\nu > 0$ проверено для $n \leqslant 1000$. Ю. В. Линник

5580. Гипотеза Римана и количественные тауберовы теоремы для рядов Ламберта. Коревар (The Riemann hypothesis and numerical Tauberian theorems for Lambert series. Korevaar Jacob), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 5, 564—571; Indagationes math., 1954, **16**, № 5, 564—571 (англ.)

Термин «количественные тауберовы теоремы» (numerical Tauberian theorems), повидимому, означает, что в этих теоремах не только устанавливается асимптотика, но и даются оценки. Функция $f(x)$ называется принадлежащей к классу D_1, если она аналитична при $x = 0$, функция $f(x)$ называется принадлежащей к классу D_ρ, $\rho > 1$, если она при $0 < x < 1$ имеет все производные, которые удовлетворяют неравенствам $|f^{(k)}(x)| \leqslant aA^k k^{\rho k}$. Доказывается теорема: Пусть ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} [a_n nx/(e^{nx}-1)]$ сходится при $x > 0$ и его сумма $f(x)$ принадлежит к классу D_ρ с $\rho \geqslant 1$. Пусть $\lim f(x) = s$ $(x \to 0)$ и имеется число $\alpha \geqslant 0$ такое, что $|a_n| \leqslant C_1(\delta) n^{\alpha-1+\delta}$. Гипотеза Римана имеет следствием: при любом $\varepsilon > 0$ $|s_n - s| \leqslant M_2(\varepsilon) n^{\omega+\varepsilon}$, где $\omega = [-1 + (\rho-1)\alpha + 2\rho\alpha^2]/(1 + \rho + 2\rho\alpha]$, $s_n = \Sigma_{k=1}^{n} a_n$. А. Г. Постников

5581. О представлении числа суммой квадратов. Эльозеф (On the representation of a number as a sum of squares. Eljoseph Nathan), Riveon lematematika, 1954, **7**, 38—43 (евр.; резюме англ.)

В первой части работы автор указывает ошибку в доказательствах 4-й и 10-й теорем Нивена (Niven J., Trans. Amer. Math. Soc., 1940, **48**, 405—417). По мнению автора, рассуждения Нивена в 4-й теореме не доказывают, что каждое число $a + 2b\sqrt{-m}$ (a, b, m — целые рациональные числа, $m \geqslant 2$ и m не делится на квадрат натурального числа > 1) является суммой трех целых чисел поля $R(\sqrt{-m})$ средствами Нивена можно доказать лишь то, что или $a + 2b\sqrt{-m} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, или же $a + 2b\sqrt{-m} = \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$, где α, β, γ — целые числа поля $R(\sqrt{-m})$. Автор приводит пример, отрицающий справедливость 10-й теоремы; пример же, отрицающий 4-ю теорему, негоден. Однако ложность 4-й теоремы была показана Зигелем (Siegel C. L., Ann. Math., 1945, **46**, 313—339), дающим бесконечное множество квадратичных полей, включая $R(\sqrt{-7})$, в которых 7 не является суммой трех квадратов.

Во второй части автор исследует возможность представления натуральных чисел суммами квадратов чисел $a + b\sqrt{D}$ (a, b, D — целые числа, D не квадрат). Он доказывает, что каждое целое рациональное число $n > 0$ является (1) суммой двух квадратов тогда и только тогда, если $D = -1$; (2) суммой трех квадратов, если $D = 2, 3, 5, 6$, но не для $D \geqslant 8$ (невозможность показывается на примере, когда $n = 7$. Случай с $D = 7$ он оставляет открытым). E. G. Straus

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 401.

5582. К метрической теории цепных дробей. Ярник Войтех, Чехосл. матем. ж., 1954, **4**, № 4, 318—329 (резюме франц.)

Изучается размерность (Хаусдорфа) некоторых множеств действительных чисел, характеризуемых определенными асимптотическими поведениями их разложений в цепную дробь.

Пусть

$$\vartheta = \{0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

— иррациональное число интервала $(0, 1)$; p_n, q_n — числители и знаменатели подходящей дроби этой цепной дроби; N_δ $(\delta > 0)$ — множество ϑ, для которых $\limsup_{n\to\infty} q_{n+1}/q_n^{1+\delta} > 0$, т. е. $\limsup_{n\to\infty} a_{n+1}/q_n^{\delta} > 0$; M_δ — множество тех ϑ, для которых $\liminf_{n\to\infty} q_{n+1}/q_n^{1+\delta} > 0$, т. е. $\liminf_{n\to\infty} a_{n+1}/q_n^{\delta} > 0$; P_∞ — множество тех ϑ, для которых $\lim_{n\to\infty} q_{n+1}/q_n = +\infty$, т. е. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$; P_b — множество тех ϑ, для которых $\liminf_{n\to\infty} a_n \geqslant b$, т. е. $a_n \geqslant b$ для всех достаточно больших n.

Из работ самого автора и Безиковича известно, что $N_\delta = 2/(2+\delta)$.

Доказана теорема: $\dim M_\delta = \frac{1}{2}\dim N_\delta = 1/(2+\delta)$ для $\delta > 0$; $\dim P_\infty = 1/2$; $1/2 < \dim P_b < 1$ для натуральных $b > 1$;

$$\lim_{b\to\infty} \dim P_b = 1/2.$$

Содержание настоящей работы является развитием ранних результатов самого автора. П. Г. Когония

5583. К теории однородных линейных диофантовых приближений. Ярник Войтех, Чехосл. матем. ж., 1954, **4**, № 4, 330—353 (резюме франц.)

Исследуются приближенные решения системы однородных линейных уравнений в целых числах; установлены соотношения между минимальным и максимальным порядками приближения.

Все числа в настоящем реферате — вещественные.

Пусть задана матрица rs чисел

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11}, \ldots, \Theta_{1r} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Theta_{s1}, \ldots, \Theta_{sr} \end{pmatrix};$$

пусть $\psi(t) = \psi(\Theta, t) = \min \left(\max_{1\leqslant j\leqslant s} |\Theta_{j1}x_1 + \cdots + \Theta_{jr}x_r + x_{r+j}|\right)$ $(t \geqslant 1)$, где min берется для всех систем целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{r+s}$, удовлетворяющих неравенствам $0 < \max(|x_1|, \ldots, |x_r|) \leqslant t$, $\alpha(\Theta) = \alpha$, $\beta(\Theta) = \beta$ обозначают верхнюю границу γ, для которых

$$\lim_{t\to+\infty} \sup t^{\gamma}\psi(t) < +\infty$$

или соответственно

$$\lim_{t\to+\infty} \inf t^{\gamma}\psi(t) < +\infty.$$

Матрица Θ называется невырожденной, если $\psi(t) > 0$ для всех $t \geqslant 1$. Известно, что $t^{r/s}\psi(t) \leqslant 1$ для $t \geqslant 1$. Очевидно, что $r/s \leqslant \alpha(\Theta) \leqslant \beta(\Theta) \leqslant +\infty$.

Типичные результаты:

Теорема 1.

I. Если $r = 1$, $s \geqslant 2$ и Θ содержит по крайней мере два линейно независимых в рациональном поле числа, то $\beta \geqslant \alpha^2/(1-\alpha)$ при $\alpha < 1$, $\beta = +\infty$ при $\alpha = 1$.

II. Если $r=2$, $s\geqslant 1$ и Θ невырождена, то $\beta\geqslant\alpha\,(\alpha-1)$.

III. Если $r>2$, $s\geqslant 1$, Θ невырождена и $(5r^2)^{r-1}<\alpha<+\infty$, то $\beta\geqslant\alpha^{r/(r-1)}-3\alpha$.

Теорема 2. Если $r=1$, $s>1$, Θ_i, Θ_j $(1\leqslant i<j\leqslant s)$ линейно независимы в рациональном поле, $\varphi(t)$ непрерывна при $t\geqslant 1$, $\varphi(t)$ — убывающая, $t\varphi(t)$ — возрастающая функция, $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=0$, $\lim_{t\to+\infty}t\varphi(t)=+\infty$, $\psi(\Theta,t)=\psi(t)<\varphi(t)$ для достаточно больших t, то существуют сколь угодно большие значения t, для которых

$$\psi(t)<\varphi(\rho(1/6\varphi(t))),$$

где ρ — функция, обратная к $u\varphi(u)$.

Доказано еще 2 теоремы подобного типа. Эти результаты являются развитием и обобщением ранних результатов А. Я. Хинчина и результатов самого автора и Апфелбека (Apfelbeck A., Чехосл. матем. ж., 1952, 76, № 1, 141—171). П. К. Когония

5584. **Обобщенные гауссовы суммы в конечных кольцах. Лампрехт** (Allgemeine Gaussche Summen in endlichen Ringen. Lamprecht Erich), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 38—39 (нем.)

Некоторые вопросы из теории обобщенных L-функций, в частности вопрос о функциональных уравнениях, приводят к исследованию структуры гауссовых сумм над некоммутативными кольцами.

Пусть R — конечное некоммутативное кольцо с единичным элементом, $e[\xi]$ — аддитивный характер в R и $\Gamma(\xi)$ — матричное представление группы единиц $\mathfrak{M}_R$ кольца R. Сумма $\tau(\Gamma,e;\mathfrak{M}_R)=\Sigma\Gamma(\xi)\,e[\xi]$ называется обобщенной гауссовой суммой над R. Наибольший интерес представляют инварианты матрицы $\tau(\Gamma,e;\mathfrak{M}_R)$ (характеристический полином, собственные значения, детерминант, след и т. д.).

При помощи соображений теории групп и теории представлений групп можно свести дело к рассмотрению таких гауссовых сумм, собственные значения которых — целые алгебраические числа, равные по абсолютной величине корню квадратному из числа элементов кольца. Характеристические полиномы их удовлетворяют функциональному уравнению, напоминающему функциональное уравнение для L-функций.

Особенно важное значение для приложений имеют гауссовы суммы в примарных кольцах. Общая теория гауссовых сумм позволяет с новой точки зрения рассмотреть структуру гауссовых сумм в коммутативных кольцах. Функциональные уравнения для характеристических полиномов гауссовых сумм совершенно аналогичны функциональным уравнениям для L-функций в полях алгебраических функций многих переменных и в гиперкомплексных системах над такими полями. Это обстоятельство тем более замечательно, что постоянным множителем в функциональных уравнениях для L-функций как раз являются гауссовы суммы.

И. И. Пятецкий-Шапиро.

5585. **К теории операторов для модулярных форм n-й степени. Кёхер** (Zur Operatorentheorie der Modulformen n-ten Grades. Koecher Max), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 33 (нем.)

Краткое сообщение. Речь идет об обобщении теории операторов Гекке для модулярных форм одного переменного на случай зигелевских модулярных форм n-й степени. С помощью операторов Гекке $T(m)$ (m — натуральное число) в классической теории модулярных форм от одного переменного выводятся соотношения между коэффициентами Фурье, имеющие интересные арифметические следствия. Поэтому, по мнению автора, обобщение теории Гекке на зигелевские модулярные формы весьма желательно. Можно сопоставить каждой невырожденной целочисленной квадратной матрице M порядка n линейный оператор $T(M)$ в пространстве модулярных форм n-й степени фиксированного веса. Основным вопросом теории операторов $T(M)$ является исследование структуры кольца, порожденного ими. И. И. Пятецкий-Шапиро

5586. **О представлении целых модулярных форм, принадлежащих подгруппам гильбертовой модулярной группы, и оценка их коэффициентов Фурье. Гундлах** (Über die Darstellung der ganzen Spitzenformen zu den Idealstufen der Hilbertschen Modulgruppe und die Abschätzung ihrer Fourierkoeffizienten. Gundlach Karl-Bernhard), Acta math., 1954, № 92, 309—345 (нем.)

Работа посвящена перенесению методов Петерсона в теорию автоморфных функций от одного переменного на случай модулярных форм, принадлежащих подгруппам гильбертовой модулярной группы.

Для формулировки результатов введем некоторые обозначения, K — абсолютно вещественное поле алгебраических чисел степени n. Γ — гильбертова модулярная группа, т. е. группа всех матриц второго порядка с определителем единица, элементы которых — целые числа из поля K. Пусть $\mathfrak{c}$ — некоторый целый идеал поля K. Сопоставим ему подгруппу $\Gamma(\mathfrak{c})$, состоящую из всех матриц $A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}$, для которых имеют места сравнения $\beta\equiv\gamma\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{c})$, $\alpha\equiv\delta\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{c})$. Обозначим через H область в n-мерном комплексном пространстве переменных $\tau_1,\ldots,\tau_n$, выделяемую неравенствами $\mathrm{Im}\,\tau_1>0,\ldots,\mathrm{Im}\,\tau_n>0$. Если $L=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\in\Gamma$, то $L\tau$, где $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, означает точку с координатами $(\alpha^{(k)}\tau_k+\beta^{(k)})/(\gamma^{(k)}\tau_k+\delta^{(k)})$. Регулярная в H функция называется целой модулярной формой размерности $-r$ относительно группы $\Gamma(\mathfrak{c})$, если $f(L\tau)\,N(c\tau+d)^{-r}=f(\tau)$ для всех $L=\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}$ из $\Gamma(\mathfrak{c})$. Хорошо известно, что такие модулярные формы образуют конечномерное линейное пространство, обозначаемое в статье $\{\Gamma(\mathfrak{c}),\,-r,\,1\}$. Для форм размерности $-r$, регулярных во всех вершинах фундаментальной области, дается оценка их коэффициентов Фурье

$$|a(\nu)|=O\left(N(\nu)^{r/2-1/4+\varepsilon}\right),\qquad(1)$$

где $a(\nu)$ — коэффициент в разложении Фурье перед $\exp\{2\pi i[\nu^{(1)}\tau_1+\cdots+\nu^{(n)}\tau_n]\}$. Эта оценка является основным результатом, полученным в работе. Соотношение (1) немедленно улучшает известные оценки для остаточного члена числа представлений абсолютно положительного числа квадратичной формы от четного числа переменных. Доказательство (1) основано на явной записи модулярных форм в виде обобщенных рядов Пуанкаре. Можно написать аналитическое выражение для коэффициентов Фурье обобщенного ряда Пуанкаре. В это выражение входят суммы Клостермана. Если использовать лишь тривиальную оценку для сумм Клостермана, то вместо (1) мы получим лишь, что

$$|a(\nu)|=O\left(N(\nu)^{r/2}\right).$$

Оценка (1) получается с помощью недавно полученной А. Вейлем оценки для сумм Клостермана.

И. И. Пятецкий-Шапиро

5587. **Об оценке коэффициентов Фурье целых модулярных форм, регулярных в вершинах фундаментальной области, принадлежащих к гильбертовой модулярной группе. Гундлах** (Über eine Abschät-

zung der Fourierkoeffizienten ganzer Spitzenformen zur Hilbertschen Modulgruppe. Gundlach Karl Bernhard), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 25—26 (нем.)

Краткое изложение результатов статьи автора (см. реф. 5586). И. И. Пятецкий-Шапиро

5588. О распределении значений аддитивных арифметических функций. Кубилюс И. П., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 4, 623—626

Доказывается теорема из вероятностной теории чисел. Арифметическая функция $f(m)$, определенная на целых $m>0$, называется сильно аддитивной, если $f(mn)=f(m)+f(n)$ при $(m,n)=1$ и $f(p^\alpha)=f(p)$ при простом p и целом $\alpha>0$.

Теорема. Пусть $f(m)$ — сильно аддитивная вещественная арифметическая функция; $A_v=\Sigma_{p\leqslant v} f(p)/p$, $B_v=(\Sigma_{p\leqslant v} f^2(p)/p)^{1/2}$. Пусть выполнены условия:

1. $B_v\to\infty$ при $v\to\infty$.

2. Существует положительная неубывающая функция $r(n)$ такая, что $\lim_{n\to\infty} r(n)=\infty$, $\ln r(n)=O(\ln n)$.

$$B_{r(n)}=B_n\left\{1+O\left(\left(\ln\frac{\ln n}{\ln r(n)}\right)^{-1}\right)\right\}.$$

3. Существует вероятностная интегральная функция распределения $K(u)$ такая, что при всех $u\neq 0$ $B_n^{-2}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ f(p)\leqslant B_n u}}\frac{f^2(p)}{p}\to K(u)$ при $n\to\infty$. Пусть $F(\omega)$ — безгранично делимый закон распределения, логарифм которой вычисляется соответственно формуле А. Н. Колмогорова (Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, 1949, стр. 92):

$$\ln\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[\exp(itu)-1-itu]\,u^{-2}\,dK(u).$$

Тогда в точках непрерывности закона $F(\omega)$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N\{f(m)<A_n+B_n\omega;\ m\leqslant n\}=F(\omega),$$

где $N\{\ \}$ означает количество чисел, удовлетворяющих условиям, указанным в скобках.

Доказательство лишь намечено. Средства доказательства — предельная теорема Б. В. Гнеденко и А. В. Грошева (вышеуказанная книга, стр. 162) и решето Вигго Бруна. Ю. В. Линник

5589. Существование функции распределения для остаточного члена, связанного с функцией Эйлера. Эрдёш, Шапиро (The existence of a distribution function for an error term related to the Euler function. Erdös Paul, Shapiro H. N.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 1, 63—75 (англ.)

Говорят, что вещественная арифметическая функция $f(m)$ имеет функцию распределения, если существует неубывающая функция $F(u)$, $-\infty<u<\infty$, удовлетворяющая условиям $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$, такая, что для каждой точки непрерывности $F(u)$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}N(n,u)/n=F(u),$$

причем $N(n,u)$ означает число натуральных $m\leqslant n$ с $f(m)<u$.

В реферируемой работе доказывается, что функция

$$H(m)=\sum_{n\leqslant m}(\varphi(n)/n)-6m/\pi^2,$$

где $\varphi(m)$ — функция Эйлера, имеет непрерывную функцию распределения.

Доказательство основано на следующих соображениях. Пусть A_k равно произведению первых k простых чисел. Функция

$$H_k(m)=-\sum_{d/A_k}\frac{\mu(d)}{d}\left\{\frac{m}{d}\right\}$$

является периодической с периодом A_k и поэтому обладает функцией распределения. Путем оценки суммы $\Sigma_{m=1}^{n}(H(m)-H_k(m))^2$ доказывается, что для любых $\delta>0$, $\varepsilon>0$ при достаточно больших k и n число натуральных $m\leqslant n$, для которых $|H(m)-H_k(m)|\geqslant\delta$, меньшее εn. Для завершения доказательства достаточно показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, не зависящее от u, что для достаточно больших n число натуральных $m\leqslant n$ с $u<H(m)<u+\delta$ меньше εn. Это составляет наиболее трудную часть доказательства и опирается на то, что для любого натурального l функция

$$\Phi_l(m)=\sum_{k=0}^{l}\frac{\varphi(m+k)}{m+k}$$

обладает непрерывной функцией распределения.

И. П. Кубилюс

5590. О лемме Селберга для алгебраических полей. Эйуб (On Selberg's lemma for algebraic fields. Ayoub R. G.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 1, 138—143 (англ.)

Татудзава и Исеки (Tatuzawa T., Iseki K., Proc. Japan Acad., 1951, **27**, 340—342), опираясь на свойства формулы обращения Мебиуса, дали весьма простое доказательство известного неравенства Селберга для рационального поля. Автор распространяет их метод на доказательство этого неравенства для алгебраических полей (ранее Шапиро (Shapiro H., Communs Pure and Appl. Math. 1949, **2**, 309—323) получил такое обобщение, следуя методам Селберга).

Пусть K — конечное алгебраическое расширение поля рациональных чисел степени n; $\mathfrak{a}$ — целый идеал K, $\mathfrak{p}$ — простой идеал K, $N(\mathfrak{a})$ — норма идеала $\mathfrak{a}$. Как и в случае рационального поля определяются функции:

$$\Lambda(\mathfrak{a})=\begin{cases}\log N(\mathfrak{p}), & \text{если } \mathfrak{a}=\mathfrak{p}^m\\ 0 & \text{если } \mathfrak{a}\neq\mathfrak{p}^m,\end{cases}\qquad \Psi(x)=\sum_{N(\mathfrak{a})\leqslant x}\Lambda(\mathfrak{a}),$$

$$\mu(\mathfrak{a})=\begin{cases}1, & \text{если } \mathfrak{a}=1\\ (-1)^r, & \text{если } \mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\dots\mathfrak{p}_r\\ 0, & \text{если } \mathfrak{p}^2/\mathfrak{a}.\end{cases}$$

Доказательство неравенства Селберга

$$\Psi(x)\log x+\sum_{N(\mathfrak{a})\leqslant x}\Lambda(\mathfrak{a})\,\Psi(x/N(\mathfrak{a}))=2x\log x+O(x)$$

основано на теореме: если

$$f(x)=\sum_{N(\mathfrak{a})\leqslant x}h(x/N(\mathfrak{a}))\log x,$$

то

$$\sum_{N(\mathfrak{a})\leqslant x}\mu(\mathfrak{a})\,f(x/N(\mathfrak{a}))=h(x)\log x+$$

$$+\sum_{N(\mathfrak{a})\leqslant x}\Lambda(\mathfrak{a})\,h(x/N(\mathfrak{a})).\qquad(1)$$

Полагая $h(x)=\Psi(x)-x+c/g+1$, где c — надлежаще выбранная константа, а g — константа, определяемая полем K, и, используя известное неравенство $\Sigma_{N(\mathfrak{a})\leqslant x}1=gx+O(x^{1-1/n})$, автор выводит оценку

$$h(x)\log x+\sum_{N(\mathfrak{a})\leqslant x}\Lambda(\mathfrak{a})\,h(x/N(\mathfrak{a}))=$$

$$=\Psi(x)\log x+\sum_{N(\mathfrak{a})\leqslant x}\Lambda(\mathfrak{a})\,\Psi(x/N(\mathfrak{a}))-$$

$$-2x\log x+O(x).\qquad(2)$$

С другой стороны,

$$\sum_{N(\mathfrak{a})\leqslant x}\mu(\mathfrak{a})\,f(x/N(\mathfrak{a}))=O(x). \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) следует неравенство Селберга. (Замечена опечатка: на стр. 138 в определении $\Lambda(\ )$ вместо $\log N(\ )$ должно быть $\log N(\mathfrak{p})$. *Ред.*). Б. М. Бредихин

5591. О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций. Шидловский А. Б., Докл. АН СССР, 1955, 100, № 2, 221—224

Основная теорема. Пусть совокупность E-функций $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ (определение E-функции см. РЖМат, 1955, 2088) является решением системы из m линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$y_k'=Q_{k,0}(z)+\sum_{i=1}^{m}Q_{k,i}(z)\,y_i,\quad k=1,\ldots,m,$$

коэффициенты которых $Q_{k,i}(z)$ — рациональные функции от z с алгебраическими числовыми коэффициентами, а α — любое алгебраическое число, отличное от нуля и полюсов функций $Q_{k,i}(z)$. Для того чтобы числа $f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)$ были алгебраически независимы, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ были алгебраически независимы над полем рациональных функций от z.

Приводится также ряд следствий из основной теоремы. До сих пор были известны лишь достаточные условия (принадлежащие Зигелю и автору) алгебраической независимости рассматриваемых в основной теореме чисел (РЖМат, 1955, 2088). Н. И. Фельдман

5592. Циклические числа 16-го порядка. Лемер (On cyclotomic numbers of order sixteen. Lehmer Emma), Canad. J. Math., 1954, 6, № 4, 449—454 (англ.)

Пусть g — первообразный корень простого модуля p. Обозначим через $(i,j)_8$ число решений сравнения $g^{8\nu+i}+1\equiv g^{8\mu+j}\pmod p$.

Диксон (Dickson L. E., Amer. J. Math., 1935, 57, 391—424) доказал что $64\,(i,j)_8$ представимо в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами от p, x, y, a и b, где $p=x^2+4y^2=a^2+2b^2=8n+1$ и $a\equiv x\equiv 1\pmod 4$, а знаки y и b зависят от выбора первообразного корня g.

В заметке показывается, что аналогичное утверждение несправедливо для $(i,j)_{16}$. Необходимые вычисления были проведены на вычислительной машине СВАК. В. И. Нечаев

5593. Численное изучение поля, образованного рядом из единиц деления круга с кубическими показателями. Кон (Numerical study of signature rank of cubic cyclotomic units. Cohn Harvey), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 47, 186—188 (англ.)

Сообщается о применении быстродействующих вычислительных машин МИДАК к изучению поля $R(\alpha)$, где

$$\alpha=\sum_{x=0}^{p-1}\exp(2\pi i x^3/p),$$

$p=6n+1$ — простое. Указываются некоторые технические подробности производимых вычислений. Н. Н. Реморов

5594. Разрешимость некоторых сравнений. Нагелль (On the solvability of some congruences. Nagell Trygve), Kgl. norske videnskab. selskabs forhandl., 1954, 27, № 3, 1—5 (англ.)

В первой части работы дано новое доказательство теоремы Сколема, гласящей, что сравнение $ax^3+by^3\equiv c\pmod p$ имеет решение, если простое число p не делит $3ab$ и $abc\neq 0$. Доказательство основано на свойствах кубических вычетов.

Во второй части доказано, что если q — нечетное простое число, то сравнение $y^2\equiv x^q+(-1)^{(q-1)/2}\times q\pmod N$ имеет решение при любом модуле N. В то же время соответствующее неопределенное уравнение $y^2=x^q+(-1)^{(q-1)/2}q$ не всегда имеет решение. Так, доказано, что это уравнение не имеет решений, если $q\equiv 3\pmod 8$. В. Д. Подсыпанин

5595. О числе целых решений уравнения $x^3+y^3=K$. Бини (Sul numero delle soluzioni intere dell'equazione $x^3+y^3=K$. Bini Umberto), Archimede, 1954, 6, № 4—5, 187—195 (итал.)

Доказываются предложения:

1. Если в уравнении

$$x^3+y^3=K \qquad (1)$$

составное K имеет только простые множители вида $6h+1$ или их степени, то уравнение (1) имеет 3, 2, 1 или ни одного решения в целых, взаимно простых числах.

2. Если K имеет по крайней мере один простой делитель вида $6h+1$ и по крайней мере какой угодно другой, то целых, взаимно простых решений уравнения (1) не более одного.

3. Если K не содержит ни одного простого делителя вида $6h+1$ или $K=3H$, $(H,\ 3)=1$, то целых взаимно простых решений уравнения (1) нет ни одного. В. А. Голубев

5596. Последняя теорема Ферма для случая $n=3$. Писа (On the case $n=3$, of Fermat's last theorem. Piza Pedro A.), Math. Mag., 1955, 28, № 3, 157—158 (англ.)

Автор пытается доказать невозможность решения уравнения $x^3+y^3=z^3$ в целых, отличных от нуля числах без применения алгебраических чисел. Содержится не доказанное им предложение: если $a^2+3b^2=c^3$ (a, b, c — целые), то $c=m^2+3n^2$ (m, n, c — целые). П. Н. Реморов

5597. Замечание о последней теореме Ферма. Манн (A remark on Fermat's last theorem. Mann Louis S.), Math. Mag., 1955, 28, № 3, 153—156 (англ.)

Попытка получить из уравнения Ферма формулы, аналогичные формулам для чисел Пифагора. Работа содержит необоснованные положения. П. Н. Реморов

5598. Последняя теорема Ферма — не только проблема алгебраического анализа, но и проблема теории вероятностей? Элстон (The last theorem of Fermat not only a problem of algebraic analysis but also a probability problem? Elston Fred G.), Math. Mag., 1955, 28, № 3, 150—152 (англ.)

5599. О числе классов бинарных эрмитовых форм с целыми комплексными коэффициентами. Жмудь Э. М., Тр. Харьковск. инж.-экон. ин-та, 1954, 5, 141—152

Пусть a, c — вещественные числа, b — комплексное число, тогда функция комплексных переменных x, y

$$f(x,\ y)=ax\bar{x}+b\bar{xy}+\bar{b}x\bar{y}+cy\bar{y}$$

называется бинарной эрмитовой формой $[a,\ b,\ c]$. $D=b\bar{b}-ac$ — определитель формы. Целочисленная эрмитова форма $[a,\ b,\ c]$ называется собственнопримитивной, если числа a, $2b$, $2\bar{b}$, c не имеют в поле $R(\sqrt{-1})$ общего делителя, отличного от единицы (R — поле рациональных чисел).

Рассматриваются целочисленные положительные эрмитовы формы с коэффициентами над полем $R(\sqrt{-1})$. В этом случае $D=-\Delta<0$, и вместе с числом классов эрмитовых форм определителя D рассматривается функция $M(\Delta)=\Sigma_C\,(1/t(C))$, где C пробегает совокупность всех классов собственнопримитивных эрмитовых форм

определителя D; $t(C) = t(f)$, $f \in C$, есть порядок группы автоморфизмов T_f любой формы класса C.

С помощью элементарного арифметического метода выводятся соотношения

$$M(\Delta p) = \begin{cases} (p+1)\,M(\Delta), & \text{если } (\Delta,\ p) = 1, \\ pM(\Delta), & \text{если } p \mid \Delta, \end{cases}$$

где p — простое число вида $4n+1$.

Указывается, что поле $R(\sqrt{-1})$ может быть заменено любым мнимо-квадратичным полем $R(\sqrt{-P})$, если всякий идеал последнего является главным.

Э. Е. Симакова

5600. Изучение некоторых линейных неоднородных форм. Декомб (Étude diophantienne de certaines formes linéaires non homogènes. Descombes R.), Bull. Soc. math. France, 1954, 82, № 3, 197—299 (франц.)

Работа состоит из трех глав. В первой главе изучаются величины $c_s(\xi) = \overline{\lim}_{p,\,q}[1/|q(q\xi - p)|]$, где ξ — иррациональное, а s, p, q — целые рациональные числа, причем $q \nmid s$, и первая точка $\Gamma(s)$ сгущения этих величин. Во второй главе изучается величина $G(\xi, t/s) = \lim_{p,\,q}|q(q\xi - p - t/s)|$. Доказывается ряд теорем, формулировки которых были опубликованы раньше (РЖМат, 1953, 48; 562). В третьей главе рассматривается форма $q\xi - p - t/s$ при условии, что $q > 0$. Задача сводится к изучению величины $K(\xi;\ s,\ a,\ b) = \lim_{u,\,v}|v(\xi u - v)|$, где $u \equiv a(s)$, $v \equiv b(s)$, $v > 0$, $(a,\ b,\ s) = 1$. Устанавливается, что множество значений величины $K(\xi;\ s,\ a,\ b)$ при фиксированном s не зависит от a и b. Пусть $K(s) = \overline{\lim}_{\xi} K(\xi;\ s,\ a,\ b)$. Тогда для любого целого t, взаимно простого с $s \geqslant 2$, и для любого иррационального ξ существует бесконечно много дробей p/q с $q > 0$, удовлетворяющих неравенству $|q(q\xi - p - t/s)| < k$, если $k > K(s)/s^2$. Это неверно, если $k < K(s)/s^2$. Для величины $K(s)$ получены границы $s^2/4 \leqslant K(s) \leqslant 2s^2/5$. Кроме того, установлено, что для бесконечного количества значений s справедливо неравенство $s^2/K(s) < (17 + 7\sqrt{5})/11$.

Н. И. Фельдман

5601. Неоднородные минимумы бинарных квадратичных форм (III). Барнс, Суиннертон-Дайер (The inhomogeneous minima of binary quadratic forms. (III). Barnes E. S., Swinnerton-Dyer H. P. F.), Acta math., 1954, 92, 199—234 (англ.)

Продолжение серии статей (Barnes E. S., Swinnerton-Dyer H. P. F., Acta math., 1952, 87, 259—323; 88, 279—316). Пусть $\mathfrak{L}$ — неоднородная решетка точек (ξ, η) плоскости:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \eta_0 + \gamma x + \delta y \end{aligned} \qquad (1)$$

определителя $\Delta = \Delta(\mathfrak{L}) = |\alpha\delta - \beta\gamma| \neq 0$, где ξ_0, η_0, α, β, γ, δ — вещественные числа, x, $y = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ Рассмотрим несимметричную гиперболическую область R_m

$$-1 \leqslant \xi\eta \leqslant m, \qquad (2)$$

где $m \geqslant 1$ — вещественное число. Решетка $\mathfrak{L}$ называется допустимой для области R_m, если она не имеет точек внутри R_m. Точная нижняя граница D_m определителей, допустимых для R_m решеток, называется критическим определителем области R_m. Допустимая решетка $\mathfrak{L}$ называется критической (для области R_m), если $\Delta(\mathfrak{L}) = D_m$. Существование критических решеток для области R_m следует из общей теоремы Суиннертон-Дайера (РЖМат, 1955, 599).

Методом Делоне разделенных параллелограммов (Делоне Б. Н., Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, 11, 505—538) изучается критический определитель D_m и критические решетки области R_m (к этому сводится вопрос о решении в целых числах x и y диофантовых неравенств $A \leqslant f(x + x_0,\ y + y_0) \leqslant B$, где f — неопределенная бинарная квадратичная форма):

1) Доказано, что всякая критическая решетка R_m имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha(x - 1/2) + \beta(y - 1/2), \\ \eta &= \gamma(x - 1/2) + \delta(y - 1/2). \end{aligned} \qquad (3)$$

2) Дано новое доказательство оценок Бланея для D_m (Blaney H., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1950, 46, 359—376):

$$D_m \geqslant 4\sqrt{m}, \qquad (4)$$

если $m \geqslant 1$, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $m = 1 + 2/r$, $r = 1,\ 2,\ 3, \ldots$;

$$D_m \geqslant \sqrt{(m+1)(m+9)}, \qquad (5)$$

если $m \geqslant 3$.

3) В интервале

$$1{,}9 \approx 21/11 \leqslant m \leqslant (1098\sqrt{10} + 6750)/4810 \approx 2{,}1 \qquad (6)$$

найдены точные значения D_m и соответствующие критические решетки.

4) Показано, что в интервале (6), кроме правой его точки, D_m является изолированным, т. е. если допустимая решетки $\mathfrak{L}$ не кратна критической, то $\Delta(\mathfrak{L}) \geqslant D_m(1 + \delta_m)$, $\delta_m > 0$; наоборот, для $m = (1098\sqrt{10} + 6750)/4810$ не изолирован.

В конце статьи приведен пример (РЖМат, 1955, 599) области K:

$$\begin{aligned} &xy > -1, \\ &xy < 2, \text{ если } x < 0,\ y < 0, \end{aligned}$$

$xy < 2 + 2\varepsilon\cos^2\pi\{\log(x/y)/\log 2\}$, если $x > 0$, $y > 0$, где $0 < \varepsilon < \sqrt{33/32} - 1$ фиксировано (близкой к гиперболической и допускающей автоморфизм $x' = 2^n x$, $y' = 2^{-n} y$), критические решетки которой на границе K имеют не более одной точки.

А. В. Малышев

5602. Неоднородные минимумы бинарных квадратичных форм (IV). Барнс (The inhomogeneous minima of binary quadratic forms (IV). Barnes E. S.), Acta Math., 1954, 92, 235—264 (англ.)

Продолжение серии статей (см. реф. 5601). Пусть $f(x,\ y) = ax^2 + bxy + cy^2$ — неопределенная бинарная квадратичная форма с вещественными коэффициентами и дискриминантом $D = b^2 - 4ac > 0$, $M(f;\ x_0,\ y_0) = \inf|f(x + x_0,\ y + y_0)|$, где x_0, y_0 — заданные вещественные числа, а x и y пробегают (независимо друг от друга) все целые числа; $M(f) = \sup_{(x_0,\,y_0)} M(f;\ x_0,\ y_0)$.

В применении к задаче нахождения $M(f)$ (эта проблема уже рассматривалась в выпуске I данной серии — другим методом) развивается метод Делоне разделенных параллелограммов (Делоне Б. Н., Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, 11, 505—538). В частности, проведены вычисления для форм $f_1 = x^2 - 19y^2$ и $f_2 = x^2 - 46y^2$. Доказано, что $M(f_1) = 170/171$, $M(f_2) = 76877/48668$.

А. В. Малышев

5603. Неоднородный минимум тройничной квадратичной формы. Барнс (The inhomogeneous mi-

nimum of a ternary quadratic form. Barnes E. S.), Acta math., 1954, **92**, 13—33 (англ.)

Пусть $Q(x, y, z)$ — неопределенная тройничная квадратичная форма с действительными коэффициентами и детерминантом $D \neq 0$; x_0, y_0, z_0 — любые действительные числа. Вводятся обозначения: $M(Q; x_0, y_0, z_0) =$ нижняя грань $|Q(x, y, z,)|$ для всех систем $x, y, z \equiv \not\equiv x_0, y_0, z_0 \pmod 1$; $M(Q) =$ верхняя грань $M(Q_0; x_0, y_0, z_0)$ для всех действительных x_0, y_0, z_0. $M(Q)$ называется неоднородным минимумом формы $Q(x, y, z)$.

Доказывается теорема:

Если $Q(x, y, z)$ не эквивалентна форме, кратной одной из форм

$$Q_1(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 + xy - 7yz + zx,$$
$$Q_2(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 15z^2,$$

то $M(Q) < (4|D|/15)^{1/3}$.

Для форм Q_1, Q_2 имеем $M(Q_i; x_0, y_0, z_0) < (4|D|/15)^{1/3}$ $(i = 1, 2)$, если $x_0, y_0, z_0 \not\equiv 1/2, 1/2, 1/2 \pmod 1$ и

$$M(Q_1; 1/2, 1/2, 1/2) = (27|D|/100)^{1/3} = M(Q_1),$$
$$M(Q_2, 1/2, 1/2, 1/2) = (4|D|/15)^{1/3} = M(Q_2).$$

Доказательство проводится методом, разработанным в другой статье (см. реф. 5601). Автор отмечает, что результаты теоремы могут быть улучшены.

Э. Е. Симакова

5604. Решетчатые покрытия сферами. Бамба (On lattice coverings by spheres. Bambah R. P.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1954, **20**, № 1, 25—52 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ryz + 2szx + 2txy$ — положительная тройничная квадратичная форма определителя $D > 0$ с произвольными вещественными коэффициентами; найдутся вещественные x_0, y_0, z_0 (зависящие от f) такого рода, что при всех целых x, y, z

$$f(x + x_0, y + y_0, z + z_0) \geqslant (125D/1024)^{1/3}. \quad (1)$$

При данной f постоянную 125/1024 в неравенстве (1) можно увеличить тогда и только тогда, когда f не эквивалентна форме вида

$$\rho(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 2zx - 2xy) \quad (\rho > 0).$$

Эта теорема равносильна следующей теореме о покрытии трехмерного евклидова пространства конгруэнтными шарами: Пусть K — шар $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2$ и Λ — решетка, содержащая точку O и построенная на трех основных точках:

$$\frac{2r}{\sqrt{5}}(-1, 1, 1), \quad \frac{2r}{\sqrt{5}}(1, -1, 1), \quad \frac{2r}{\sqrt{5}}(1, 1, -1).$$

Шары, получаемые параллельным переносом K на векторы Λ, покрывают все R^3. Из всех решеток, обладающих (для данного K) этим свойством, решетка Λ имеет наибольший определитель $d(\Lambda) = 32r^3/5\sqrt{5}$ (если не обращать внимания на решетки, получаемые из Λ ортогональным преобразованием координат). Плотность покрытия $\theta(K) = V(K)/d(\Lambda) = 5\sqrt{5}\pi/24$.

При доказательстве используется приведение положительных тройничных форм по Зееберу и понятие трехмерного параллелоэдра (ср. РЖМат, 1955, 2093).

Б. А. Венков

5605. О произведениях последовательных целых чисел. Тебо (Sur des produits de nombres entiers consécutifs. Thébault Victor), Mathesis, 1954, **63**, № 6—8, 254—261 (франц.)

Эрдёш доказал, что произведение последовательных целых чисел не может быть точным квадратом и что произведение последовательных нечетных чисел не может быть m-й степенью числа $(m > 1)$. Ригге доказал, что уравнение в целых числах

$$x(x + 1)(x + 2)\ldots(x + k - 1) = cy^2$$

невозможно, если c равно одному из произведений простых чисел, меньших k.

Рассматривается несколько элементарно доказываемых случаев этих теорем, например произведение 4 или 5 последовательных целых чисел не может быть квадратом.

В. А. Голубев

5606. Замечание к теории степенных вычетов mod (p^α). Крайнякова (Poznámka k teórii potenčných zvyškov mod p^α. Krajňáková Dorota), Mat.-fyz. časop., 1954, 4, № 4, 212—217 (словац.; резюме рус.)

Рассматриваются вычеты степени k по модулю p^α, $p > 2$ — простое, $k \geqslant 1$, $\alpha \geqslant 1$, $(k, p) = 1$; обозначая число всех таких вычетов, отличных от нуля, символом $P_k(p^\alpha)$, имеем следующее равенство

$$P_k(p^\alpha) = \frac{p - 1}{(k, p - 1)} p^{\alpha - 1 - sk} \frac{1 - p^{k(s+1)}}{1 - p^k},$$

где положено $[(\alpha - 1)/k] = s$.

А. И. Попов

5607. О производящих функциях для ограниченных разбиений целых рациональных чисел. Никол, Вандивер (On generating functions for restricted partitions of rational integers. Nicol C. A., Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 1, 37—42 (англ.)

Пусть

$$F(z, x, n, a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 - zx^i)^{a_i}, \quad (1)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — неотрицательные целые числа, не все равные нулю.

Дается рекурсивное соотношение для коэффициентов полинома от x, получаемого разложением произведения (1). Затем, полагая в (1) $z = 1$, $a_i = 1$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, авторы устанавливают некоторые соотношения между коэффициентами соответствующего полинома и так называемыми числами Штернека (Bachmann, Niedere Zahlentheorie, Leipzig, 1909, 2, 230—232):

$$\Phi(k, n) = \varphi(n)\mu(n(k, n))/\varphi(n/(k, n)),$$

где k и n — натуральные числа, (k, n) — их общий наибольший делитель, $\varphi(n)$ — функция Эйлера и $\mu(n)$ — функция Мёбиуса. Имеются опечатки.

Г. А. Ломадзе

5608. Простое доказательство теоремы Ландау. Райт (A simple proof of a theorem of Landau. Wright E. M.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1954, 9, № 2, 87—90 (англ.)

Пусть $\sigma_k(x)$ — число целых $n \leqslant x$, являющихся произведением k простых множителей, $n = p_1 p_2 \ldots p_k$, и $\pi_k(x)$ — число целых n таких, что все множители различны.

Тогда

$$\pi_k(x) \sim \sigma_k(x) \sim x(\log\log x)^{k-1}/(k - 1)!\log x.$$

В случае $k = 1$ отсюда получается закон распределения простых чисел

$$\pi_1(x) \sim \sigma_1(x) \sim x/\log x;$$

для $k \geqslant 2$ теорема была доказана Ландау в 1900 г.

Приводится элементарное доказательство теоремы

Ландау для случая $k \geqslant 2$, исходящее из известного результата $\Sigma_{p \leqslant x} (1/p) \sim \log \log x$, и закона простых чисел: $\theta(x) \sim x$, где $\theta(x) = \Sigma_{p \leqslant x} \log p$ — функция Чебышева. Е. П. Ожигова

5609. Доказательство иррациональности числа π. **Брёйш** (A proof of the irrationality of π. Breusch Robert), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 9, 631—632 (англ.)

Для доказательства использованы ряды

$$A_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^m x^{2k+1} / (2k+1)!$$

и

$$B_t(N) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^k (2k + \tfrac{1}{4} - t - 1)(2k + \tfrac{1}{4} - t - 2) \ldots$$
$$\ldots (2k + 1 - 2t) N^{2k+1} / (2k+1)!.$$

Н. И. Фельдман

5610. Об интервалах, содержащих аффинно-эквивалентную систему n целых чисел по mod k. **Морделл** (On intervals containing an affinely equivalent set of n integers mod k. Mordell L. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 6, 854—859 (англ.)

Даны положительные целые числа $n > 2$, k и система n целых чисел $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Редеи (Redei L., Acta math. Acad. sci. hung., 1951, 2) доказал теорему: если k — простое число, то существуют целые числа a, b, $(a, k) = 1$ такие, что система целых чисел (y), где $y_r \equiv ax_r + b \pmod{k}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, лежит в интервале ширины L, причем $nL^{n-1} \leqslant 2^{n-1} k^{n-2}$, т. е. $|y_r - y_s| \leqslant L$ $(r, s = 1, 2, \ldots, n)$.

Автор дает более простое доказательство теоремы и распространяет ее на случай, когда k не является простым. Э. Е. Симакова

5611. Об одном определенном типе пространственной таблицы. **Уолс** (On a certain type of space-tableau. Walls Nancy), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1954, 9, № 2, 82—86 (англ.)

Пусть целое число n представлено в виде суммы целых слагаемых $a_1, a_2, \ldots, a_t$, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_t$. Замена a_i на $a_i + 1$ или a_{i-1} на $a_{i-1} - 1$ дает разложение чисел $n+1$ или $n-1$, ассоциированное с данным разложением числа n.

Рассматриваются матрицы из n элементов, расположенных в порядке убывания или возрастания их величины, названные стандартными таблицами. Устанавливается соотношение:

Число стандартных таблиц на данное разложение числа n на слагаемые равно сумме чисел стандартных таблиц ассоциированных разложений числа $n-1$.

Далее рассматриваются матрицы трех измерений с определенным расположением элементов, названные пространственными таблицами. Устанавливаются соотношения:

1) Число пространственных таблиц с нижним слоем из n элементов равно $n!$

2) Число пространственных таблиц с данным нижним слоем равно числу стандартных таблиц на разложение этого слоя.

3) Число пространственных таблиц с нижним слоем данного разложения равно квадрату числа стандартных таблиц на данное разложение.

4) Сумма квадратов чисел стандартных таблиц разложения числа n равна $n!$ В. А. Голубев

5612. Функциональное обобщение чисел Бернулли. **Силверман** (Functional generalization of Bernoulli numbers. Silverman Louis L.), Riveon lematematika, 1954, 7, 35—37 (евр.; резюме англ.)

Вводя целое число p и произвольный степенной ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$, автор изучает коэффициенты B_n, порожденные условием:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n / n!\right)\left(1 + \sum_{h=p}^{\infty} a_h x^{h+1-p}\right) = 1.$$

Они включают в себя числа Бернулли и Эйлера и другие известные числа, когда $y = f(x)$ является непрерывной функцией, удовлетворяющей условию $y^{(n)} = y$ $(n = 1, 2, 4)$. Случай $n = 3$ затронут вкратце. D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 400—401

См. также: 5564 К, 5636, 5645, 6038, 6093

АЛГЕБРА

5613 К. Высшая алгебра. **Мостовский, Старк** (Algebra wyzsza. Mostowski Andrzej, Stark Marceli. Warszawa, Panstw. Wydawn. Nauk, 1954, VI s, 273 + errata, 17,30 zł.), Przew. bibliogr., 1955, **11**, № 3, 41 (библ.)

5614 К. Введение в алгебру. I. **Мойсил** (Introducere in algebră. I. Inele si ideale. Vol. I. Moisil Gr. C. Editura Academici Republicii Populare Romîne, 1954, 254 p., 9, 10 Lei) (рум.)

Книга является первым томом в серии книг, которые будут содержать теорию групп, теорию тел и их групп автоморфизмов, линейную алгебру, теорию гиперкомплексных чисел, теорию форм и инвариантов и т. д. Она предназначена для читателя, незнакомого с абстрактной математикой, и является введением в современную алгебру. Книга состоит из двух частей. В первой части рассматриваются: кольцо целых чисел и их кольцо классов вычетов; целые числа Гаусса; кольцо $J[i\sqrt{3}]$; квадратичные иррациональности; многочлены с комплексными, вещественными, рациональными и целыми коэффициентами; сравнения высших порядков; многочлены от нескольких неизвестных. Во второй части даются определения абстрактного коммутативного кольца, поля и идеала, и рассматриваются: кольцо частных некоторого кольца; понятие фактор-кольца, кольцо многочленов над некоторым кольцом; кольца, в которых имеет место разложение на простые множители; кольца главных идеалов; понятие изоморфизма и гомоморфизма; отношения эквивалентности.

Новых научных результатов книга не содержит. Изложение ясное и простое, много хорошо подобранных примеров. Книга является конкретным введением в абстрактную математику. В. А. Андрунакиевич

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

5615. Об одной новой проблеме устойчивости для алгебраических уравнений с действительными коэффициентами. **Фаэдо** (Un nuovo problema di stabilità per le equazioni algebriche a coefficienti reali. Faedo Sandro), Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1953, **7**, № 1—2, 53—63 (итал.)

Устанавливаются достаточные условия для того, чтобы все полиномы

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (1)$$

коэффициенты которых удовлетворяют неравенствам

$$\underline{a}_i \leqslant a_i \leqslant \overline{a}_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n;\ \underline{a}_0 > 0), \qquad (2)$$

где $\underline{a}_i$ и $\overline{a}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — заданные числа, были одновременно гурвицевыми полиномами.

Для этого строятся две таблицы $\underline{R} = \{\underline{\alpha}_{ij}\}$, $\overline{R} = \{\overline{\alpha}_{ij}\}$; $i, j = 0, 1, 2, \ldots$, где $\underline{\alpha}_{k0} = \underline{a}_{2k}$, $\underline{a}_{k1} = \underline{a}_{2k+1}$, $\overline{\alpha}_{k0} = \overline{a}_{2k}$, $\overline{a}_{k1} = \overline{a}_{2k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots$, $\underline{a}_k = \overline{a}_k = 0$ при $k > n$.

Затем для $j > 1$ и $i = 0, 1, \ldots$ полагается

$$\underline{\alpha}_{ij} = \begin{vmatrix} \underline{\alpha}_{i+1,\ j-2} & \overline{\alpha}_{0,\ j-2} \\ \overline{\alpha}_{i+1,\ j-1} & \underline{\alpha}_{0,\ j-1} \end{vmatrix}, \quad \overline{\alpha}_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_{i+1,\ j-2} & \underline{\alpha}_{0,\ j-2} \\ \underline{\alpha}_{i+1,\ j-1} & \overline{\alpha}_{0,\ j-1} \end{vmatrix}$$

Доказывается основная

Теорема. Все полиномы (1), коэффициенты которых удовлетворяют неравенствам (2), являются одновременно гурвицевыми, если в таблице $\underline{R}$ и $\overline{R}$

$$\underline{\alpha}_{0t} > 0, \ \overline{\alpha}_{0t} > 0, \ 1 \leqslant t \leqslant n.$$

Это — обобщение классических условий Рауса для случая $\underline{a}_i = a_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, так как в этом случае таблицы R и $\overline{R}$ совпадают с таблицей Рауса.

Выясняется, что при выполнении условий теоремы имеют место неравенства

$$\alpha_{ij} \leqslant \alpha_{ij} \leqslant \alpha_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots)$$

где α_{ij} — элементы таблицы Рауса, построенной по коэффициентам a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ полинома $f(z)$.

Ф. Р. Гантмахер

5616. Мультипликативные сравнения матриц. Мальцев А. И., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 3, 333—335

Ассоциативная система всех квадратных матриц данного порядка n элементами из данного поля F, ранг каждой из которых не превышает r, обозначается через F_n^r. Решается вопрос об описании всех гомоморфизмов системы F_n^r, который сводится к описанию всех рефлексивных, симметричных и транзитивных сравнений, определенных на F_n^r и выдерживающих умножение как слева, так и справа на произвольную матрицу из F_n^r. Все такие сравнения исчерпываются сравнениями, которые строятся следующим образом.

Пусть μ — любое фиксированное целое число, удовлетворяющее условию $1 \leqslant \mu \leqslant r$; $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots$ $\ldots \subseteq G_{\mu-1}$ — неубывающая цепочка подгрупп мультипликативной группы поля F и G_μ — какой-либо нормальный делитель группы всех неособенных матриц порядка $r - \mu + 1$, содержащий $G_{\mu-1}$. Тогда

$$A \equiv B\ (G_1, \ldots, G_\mu)\ (A,\ B \in F_n^r),$$

если выполняется одно из следующих условий: а) ранг $A \leqslant r - \mu$, ранг $B \leqslant r - \mu$; б) ранг $A = r - i + 1$, $B = \lambda A$, $\lambda \in G_i$ $(1 \leqslant i < \mu)$; в) ранг A = ранг $B = r - \mu + 1$, $LA = LB$, $B = AU$, где L — пространство векторов-строк размерности n, а U — некоторая матрица ранга $r - \mu + 1$, индуцирующая на подпространстве LA линейное преобразование $U_0 \in G_\mu$.

Замеченная опечатка: стр. 333, строка 16 снизу, напечатано $(\mu - 1 \leqslant i \leqslant r)$, должно быть $(1 \leqslant i < \mu)$.

Е. Г. Шульгейфер

5617. О применении теории матриц по Вейру к решению систем линейных дифференциальных и разностных уравнений. Чермак (O použití Weyrovy theorie matic k řeš ení homogennich systémů lineárních diferencialnich a diferencnich rovnic. Čermák Jiří), Práce Moravskoslezské akad. věd přírod., 1953, **25**, № 12, 337—356 (чем.; резюме русс.)

Используя вместо элементарных делителей Вейерштрасса характеристику матрицы по Вейру и связанное с ней приведение к каноническому базису (E. Weyr, Zur Theorie der bilinearen Formen, Mh. Math. Phys., 1890, **1**, 163—236), автор получает основные классические результаты для систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и простые формулы для решений систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Результаты, относящиеся к разностным уравнениям, взяты из статьи автора (РЖМат, 1955, 2663).

Ф. Р. Гантмахер

5618 К. Исследования по топологической линейной алгебре. Кирххофф (Beitr ge zur topolcgischen linearen Algebra. Kirchhoff Adrian, 36+1S. Groningen — Djakarta, P. Noordhoff N. V., 1953) (нем.)

Перепечатка статьи (РЖМат, 1954, № 3965). Добавлены биографические данные автора.

З. И. Боревич

ГРУППЫ

5619. О группах порядка $g = p^2g'$. Цао Си-хуа (曹錫華) (Шусюэ сюэбао), 1953, **2**, № 3, 167—202 (кит.; резюме англ.)

Исследуются свойства характеров по простому модулю p группы $\mathfrak{G}$ порядка $g = p^2g'$, $(p, g') = 1$. При этом рассматривается случай, когда силовская p-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ нециклическая (автор отмечает, что противоположный случай проще и может быть исследован тем же методом). Пусть $\mathfrak{p}$ — одна из таких подгрупп Силова, $\mathfrak{L}(\mathfrak{p})$ — ее централизатор, а $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ — ее нормализатор в $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{L}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \times \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — подгруппа, порядок которой не делится на p. Пусть $\mathfrak{p}_1$ — подгруппа порядка p группы $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{L}(\mathfrak{p}_1)$ и $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_1)$ — соответственно централизатор и нормализатор этой подгруппы в $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{L}(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — подгруппа порядка, делящегося на p и не делящегося на p^2. Выясняется связь между характерами этих подгрупп и характерами группы $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{Z}$ — простой делитель числа p в поле корней из единицы степени g. Два неприводимых характера $\chi_\rho^{(t)}$ и $\chi_\sigma^{(i)}$ группы $\mathfrak{G}$ входят в один и тот же блок (см. Brauer R., Nesbitt C. J., On the modular characters of groups, Ann. Math., 1941, **42**, 556—590), если

$$\frac{h_i \chi_\rho^{(t)}}{f_\rho} \equiv \frac{h_i \chi_\sigma^{(i)}}{f_\sigma} \pmod{\mathfrak{Z}}$$

для всех значений i, т. е. для всех классов сопряженных элементов группы $\mathfrak{G}$. Если степени неприводимых представлений, входящих в данный блок, делятся на p^r и не делятся на p^{r+1} $(0 \leqslant r \leqslant 2)$, то число $2 - r$ называется дефектом блока. Блоки дефекта 2 группы $\mathfrak{G}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами неприводимых характеров подгруппы $\mathfrak{B}$, ассоциированных в $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$. Для каждого блока дефекта 1 группы $\mathfrak{G}$ можно подобрать соответствующую подгруппу $\mathfrak{p}_1$ таким образом, что блоки дефекта 1, соответствующие одной и той же подгруппе $\mathfrak{p}_1$, находятся во взаимно-однозначном соответствии с класса-

неприводимых характеров степени, делящейся на подгруппы $\mathfrak{P}$, ассоциированных в $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_1)$. Для оков дефекта 0 группы $\mathfrak{G}$ непосредственно указыется, какого вида должны быть неприводимые характеры. Исследуется также связь между значениями арактеров группы $\mathfrak{G}$ и «числами разложения» d^i_{uc}, явющимися элементами поля деления круга и связанми с инвариантами Картана некоторых подгрупп уппы $\mathfrak{G}$. В. К. Ту|кин

5620. Вычисление проекций и сечений базиса сложных решеток. Палатник Л. С., Пересада В. И., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 49, Тр. Физ. отд. физ.-мат. фак-та, 1953, 4, 201—210

Сложной решеткой авторы называют объединение скольких решеток, полученных из одной R параллельными переносами на векторы, рациональные носительно R. Решаются следующие задачи: 1. Опиание расположения узлов сложной решетки на данй рациональной относительно R плоскости. 2. Опиание расположения проекций узлов на плоскость, рпендикулярную рациональной прямой. 3. Описание сположения узлов на данной рациональной прямой. ыводы излишне усложнены. Д. К. Фаддеев

5621. Структурные соотношения между конечной группой, групповым кольцом и неприводимыми представлениями. Хельмберг (Strukturbeziehungen zwischen endlicher Gruppe, Gruppenring und irreduziblen Darstellungen), Helmberg Gielbert, Monatsh. Math., 1954, 58, № 4, 241—257 (нем.)

Рассматривается ряд предложений, устанавливающих связь между структурой конечной группы и особенностями ее абсолютно неприводимых линейных представлений.

Автор использует естественную связь между подгруппой конечной группы и соответствующим этой подгруппе идеалом группового кольца, порожденным элементом кольца, равным сумме элементов подгруппы. Кроме того, используется представление конечной группы, содержащее в качестве неприводимых частей каждое из неприводимых представлений по одному разу. Автор называет его главным. Оно дает точное представление группового кольца.

Далее вводится в рассмотрение число тождественных представлений, содержащихся в качестве неприводимых частей в представлениях подгруппы, которые индуцируются неприводимыми представлениями группы, и соответствующие подпространства (т. е. подпространства, в которых подгруппа осуществляет тождественное преобразование; автор называет их неподвижными пространствами).

При различных предположениях относительно неподвижных пространств подгруппы, или элементов группы, выводятся различные особенности структуры группы.

Доказывается следующая теорема: если в каждом нетривиальном представлении конечной группы порядка g матрица по крайней мере одного из элементов A_1, A_2, ..., A_s не имеет характеристического числа, равного 1, то произведение порядков этих элементов равно kg (k — целое) и каждый элемент A группы появляется в формуле $A = A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_s^{\alpha_s}$ ровно k раз.

Автор доказывает также, что если в каждом неприводимом представлении степени выше 1 матрица по крайней мере одного из элементов A_1, A_2, ..., A_s не имеет характеристического числа, равного 1, то эти элементы порождают нормальный делитель.

Приводится также ряд других теорем, которые либо известны, либо легко следуют из классической теории характеров конечных групп.

Автор указывает на аналогию между некоторыми приведенными им теоремами теории линейных представлений и теоремами теории диофантовых приближений, а также на прямую связь этих теорем в случае абелевых групп. И. Д. Адо

5622. О примарных группах. Хонда (On primary groups. Honda Kin'ya), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1952, I—II, 71—82 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть G — абелева p-группа, удовлетворяющая условию $G \neq pG$; символом $h(G)$ обозначается такое натуральное число, что $p^{h(G)}$ является наименьшим среди порядков элементов группы G, не принадлежащих подгруппе pG. Элементарная группа показателя n есть прямая сумма циклических подгрупп порядка p^n.

Основным результатом работы является доказательство следующей теоремы разложения: Если G есть абелева p-группа и $h(G) = n$, то имеет место прямое разложение

$$G = K_1 + K_2, \qquad (1)$$

где K_1 — элементарная группа показателя n, K_2 — группа, для которой либо $h(K_2) > n$, либо $pK_2 = K_2$.

Примечание референта. Теорема разложения следует из теоремы 5 работы референта (Матем. сб., 1941, 9(51), 165—181). В качестве K_1 надо взять максимальную сервантную подгруппу группы G, порядки элементов которой не превосходят $p^{h(G)}$.

Л. Я. Куликов

5623. О строении абелевых p-групп, Фукс (On the structure of Abelian p-groups. Fuchs L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, 4, № 3—4, 267—288 (англ.; резюме русс.)

Изучаются примарные абелевы группы произвольной мощности. Основной вопрос, который решается автором, — это установление необходимых и достаточных условий для существования редуцированной примарной группы, имеющей заданную мощность, заданный тип и заданную последовательность ульмовских факторов. Полученный результат отличается от соответствующего результата, полученного ранее Куликовым (см. Куликов, Тр. Моск. мат. о-ва, 1952, 1, 247—326, а также РЖМат. 1955, 3087), только тем, что одно из условий Куликова заменено ему эквивалентным. Доказательство достаточности получающихся условий в реферируемой работе проще и по идее отлично от доказательства, приведенного в работе Куликова, где все делается для обобщенных примарных групп.

В конце работы приведен пример двух неизоморфных примарных абелевых групп G и G', у которых ульмовские факторы изоморфны, ульмовские типы равны и мощности подгрупп G^α и G'^α совпадают. Здесь $G^0 = G$, G^α при непредельном α — подгруппа, состоящая из всех элементов подгруппы $G^{\alpha-1}$, имеющих в $G^{\alpha-1}$ бесконечную высоту, G^α при предельном α — пересечение всех G^β, где $\beta < \alpha$; подгруппы G'^α определяются аналогично. А. П. Мишина

5624. Комплексы в абелевых группах. Шерк, Кемперман (Complexes in abelian groups. Scherk Peter, Kemperman J. H. B.) Canad. J. Math., 1954, 6, № 2, 230—237 (англ.)

Пусть A, B — непустые конечные множества элементов абелевой группы $\mathfrak{G}$, $A + B$ — множество всех элементов группы $\mathfrak{G}$ вида $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$; $[A]$, $[B]$, $[A + B]$ — число элементов рассматриваемых множеств. Ясно, что если $[B] \leqslant k$, где $k \geqslant 1$ заранее фиксировано, то

$$[A + B] \geqslant [A] + [B] - k.$$

В работе доказывается, что при некоторых ограничениях, накладываемых на множества A и B, это же неравенство остается справедливым и при $[B] > k$.
А. П. Мишина

5625. О метабелевых группах. Цубои (Metabelian Group 坪井照男), 數學 (Сугаку), 1953, 5, № 2, 83—85 (япон.)

Рассматриваются двуступенно разрешимые нильпотентные группы. Через $\{e\} = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_c = G$ обозначается верхний центральный ряд группы G, а через $G = G_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset G_{c+1} = \{e\}$ — ее нижний центральный ряд. Если в нильпотентной группе G имеется абелев нормальный делитель A, с конечной циклической фактор-группой G/A, то $A/(A \cap Z_i) \simeq G_{i+1}$ для любого $i = 1, \ldots, c$.

Аналогичный результат для случая конечных p-групп был установлен ранее (Tuan H. F., Acad. Sinica Science Record, 1950, 3).
В. М. Глушков

5626. О теореме Фробениуса. Птак (O větě Frobeniově. Pták Vlastimil), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 3, 207—212 (чеш.)

Дается более простое, по сравнению с изложенным в книге Цассенхауза (Zassenhaus H., Lehrbuch der Gruppentheorie, I, 1937), доказательство теоремы Фробениуса. Оно проводится методом индукции по порядку группы и основывается на двух простых вспомогательных предложениях о n-степенях элементов группы.
С. Д. Берман

5627. Теоремы о покрытии групп. Маттьоли (Teoremi di copertura dei gruppi. Mattioli Ennio), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1953, 7, № 3—4, 301—309 (итал.)

Введено понятие группы с квазилинейным покрытием: так называется абелева группа G, которая может быть разбита на системы, состоящие из одинакового числа совокупностей с одним и тем же числом элементов:

$$S_1 = (H_{11}, \ H_{12}, \ \ldots)$$

$$S_2 = (H_{21}, \ H_{22}, \ \ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

причем: а) каждый элемент G встречается в этом разбиении один и только один раз; б) два элемента G, входящие в одну и ту же совокупность H_{ij}, отличаются один от другого по крайней мере тремя базисными элементами G; в) два элемента G, принадлежащие различным совокупностям H_{ij} и H_{is} одной и той же системы S_i, отличаются один от другого по крайней мере двумя базисными элементами G; г) H_{11} и S_1 подгруппы G.

Доказывается, что группами с квазилинейным покрытием являются группы, представляющие собою произведения n^k элементарных абелевых p-групп порядка $n = p^a$ (p — простое число, $n > 2$). Указывается на связь этого результата с теорией размещений с повторениями.

В заключение дано новое доказательство теоремы Заремба о группах с линейным покрытием (Zaremba S. K., J. London Math. Soc., 1952, 27, 242—246).
В. К. Туркин

5628. О существовании недискретных топологий в бесконечных абелевых группах. Кертес, Селе (On the existence of non-discrete topologies in infinite abelian groups. Kertész A., Szele T.), Publs. mathematicae, 1953, 3, № 1—2, 187—189 (англ.)

Каждая бесконечная абелева группа G обладает недискретной хаусдорфовой топологизацией, удовлетворяющей первой аксиоме счетности. При этом в качестве системы окрестностей нуля могут быть выбраны подгруппы в том и только в том случае, когда G не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.
Н. Я. Виленкин

5629. Непрерывность групп преобразований в топологических пространствах. Робинсон (Continuity of transformation groups in topological spaces. Robinson J. E.), Duke Math. J., 1954, 21, № 2, 337—348 (англ.)

X — топологическое T_1 пространство, являющееся абстрактной абелевой группой. Приведено условие, при котором X является непрерывной группой, и указаны примеры из теории общих динамических систем, показывающие возможность нарушения непрерывности $x + y$ или $-x$ ($x, y \in X$) даже в том случае, когда X — метрическое пространство.

Пусть равенство $mx = ny$ ($m, \ n$ — целые числа, $x, y \in X$) определяет произведение $rx = y$ ($r = m/n$). Даны условия, при которых произведение $rx = y$ непрерывно по совокупности переменных. В случае, когда X — линейное пространство (над полем рациональных чисел) с инвариантной метрикой, рассмотрен вопрос о вложении его в банахово пространство.

Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство, на котором определена транзитивная группа G гомеоморфизмов с единичной стационарной подгруппой, удовлетворяющая одному из условий: а) G — абелева группа; б) абстрактная группа, определяемая группой G на пространстве X, имеет центр, плотный в X. Тогда X — непрерывная группа.

Для групп типа а), б) эта теорема уточняет теорему Монтгомери (Montgomery D., Bull. Amer. Math. Soc. 1936, 42, 879—882).
Г. И. Ка

5630. К теории полугрупп в группе. Контор ович П. Г., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 2, 229—231

Пусть $G \supset \mathfrak{M} \supset \mathfrak{S}$, где G — группа без кручения, $\mathfrak{M}$ — ее подгруппа, $\mathfrak{S}$ — полугруппа. Пусть $\mathfrak{M}$ такова, что всякая подгруппа группы G, содержащая $\mathfrak{S}$, содержит и $\mathfrak{M}$, а $\mathfrak{S}$ инвариантна относительно всех внутренних автоморфизмов $\mathfrak{M}$. В статье исследуются идеалы полугруппы $\mathfrak{S}$. Все они оказываются двусторонними.

Если $\mathfrak{A}$ есть идеал $\mathfrak{S}$, то совокупность всех таких элементов $x \in \mathfrak{S}$, что $x^n \in \mathfrak{A}$ при некотором n, обозначается $I(\mathfrak{A})$ и называется изолятором $\mathfrak{A}$. Если $I(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$, то идеал $\mathfrak{A}$ называется изолированным. $I(\mathfrak{A})$ есть пересечение всех изолированных идеалов, содержащих $\mathfrak{A}$.

Если для идеала $\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{S} - \mathfrak{P}$) является полугруппой, то идеал $\mathfrak{P}$ называется простым. Простой идеал $\mathfrak{P}$ называется минимальным простым идеалом над идеалом $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{A}$ и между $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{A}$ нет простых идеалов.

Пусть $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{S}$. $\mathfrak{P}$ является минимальным простым идеалом над $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{S} - \mathfrak{P})$ есть максимальная полугруппа в $(\mathfrak{S} - \mathfrak{A})$.

Доказывается, что $I(\mathfrak{A})$ есть пересечение всех минимальных простых идеалов над $\mathfrak{A}$. Приводятся различные другие свойства простых и изолированных идеалов.
Е. С. Ляпин

5631. О включении семигрупп. Птак (Vnořitelnost semigrup. Pták Vlastimil), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 3, 259—261 (чеш.)

Краткое изложение результатов работы автора «О включении семигрупп» (Чехосл. матем. ж., 1952, 2(77), 247—271). В первой части этой заметки доказана теорема:

Для того чтобы семигруппа S могла быть включена в группу, необходимо и достаточно выполнение условия: если $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные элементы S, удовлетворяющие некоторым соотношениям, то любое соотно-

ение между элементами $a_1, \ldots, a_n$, которое может ть получено из этих соотношений в группе, должно кже выполняться и в S.

Во второй части исследуется возможность задания мигруппы с помощью образующих элементов и опреляющих соотношений, а также дается новое доательство достаточного признака включаемости семиуппы, найденного Орэ (Ore O., Ann. Math., 1931, 32, 463—477). Условия погружаемости семигруппы группу, отличные от условий автора, ранее были йдены А. И. Мальцевым (Матем. сб., 1939, 6(48), 1—336; 1940, 8(50), 251—264). С. Д. Берман

5632. О теории идеалов коммутативных полугрупп. **Аубер т** (On the ideal theory of commutative semigroups. Aubert Karl Egil), Math. scand., 1953, 1, № 1, 39—54 (англ.)

Пусть S — коммутативная полугруппа с единицей. ли для a, $b \in S$ в S разрешимо уравнение $ax = b$, пишут a/b. Если a/b и одновременно b/a, то $a \sim b$. ножество классов эквивалентных между собою элеентов относительно действия умножения, определяемого умножением представителей, образует полугруп- $\overline{S}$. В $\overline{S}$ $\overline{a} \sim \overline{b}$ ($\overline{a}, \overline{b} \in \overline{S}$) возможно лишь при $\overline{a} = \overline{b}$. Исследуются идеалы полугруппы S. Например, для ого чтобы в S были выполнены условия обрыва как зрастающих, так и убывающих цепей идеалов, необдимо и достаточно, чтобы $\overline{S}$ была конечной.

A называется базисом идеала I, если: 1) $A \subset I$, всякий идеал, содержащий A, содержит и I, 3) для якого $A' \subset A$ ($A' \neq A$) существует такой идеал I', го $A' \subset I'$, $I' \subset I$, $I' \neq I$. Если A и B — два базиса деала I, то существует такое взаимнооднозначное тображение φ A на B, что $\varphi a \sim a$ ($a \in A$).

Помимо других результатов родственного характера ассматривается связь со свойствами идеалов колец, апример, для того чтобы каждый идеал мультипликативной полугруппы коммутативного кольца R с единицей являлся идеалом и самого кольца R, необходимо и достаточно, чтобы для всяких a, $b \in R$ выполнялось или a/b или b/a. Е. С. Ляпин

5633. Максимальные идеалы в теории полугрупп, II. **Шварц Штефан,** Чехосл. мат. ж. Чехосл. АН, 1953, 3, № 4, 365—383 (резюме англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1955, 1673.

Пусть S — полугруппа и M — один из ее максимальных нетривиальных двусторонних идеалов. S/M есть полугруппа, получаемая из S путем отождествления между собою всех элементов M.

Если S имеет хотя бы один минимальный левый идеал и хотя бы один минимальный правый идеал и $S - M$ является полугруппой, то $S - M$ представляет собою сумму попарно непересекающихся изоморфных между собою групп.

Если все идеалы S двусторонни, то $S - M$ состоит из одного элемента или является группой.

Получен и ряд других результатов сходного характера, при этом не только для двусторонних, но и для односторонних идеалов. Е. С. Ляпин

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

5634. Теория Галуа и теория исключения. **Крулль** (Galoissche Theorie und Eliminationstheorie. Krull Wolfgang), Rev. real acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid, 1953, 47, № 4, 469—494 (нем.)

Рассматривается многочлен

$$P(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$$

с коэффициентами из заданного поля R. Пусть K — подполе поля R, относительно которого коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ — алгебраические числа, $R = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Ставится задача: построить группу Галуа $\mathfrak{G}$ многочлена $P(x)$, если заданы некоторые из существующих нетривиальных рациональных относительно R соотношений между корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. В работе существенно используются результаты из теории исключения и теории идеалов, в частности результаты самого автора и других (Ван-дер Варден, Современная алгебра. II, 1947; Krull W., Idealtheorie. Ergebnisse der Mathematik, 1935, Bd 4, H. 3., Rev. Real acad. cienc. exact. fis. y natur. Madrid, 1945, 39) Пусть $w_0, w_1, \ldots, w_n$ — неизвестные. Составим однородную форму

$$I(w) = \prod_{\sigma=0}^{g-1} (w_0 + \alpha_1^{(\sigma)} w_1 + \ldots + \alpha_n^{(\sigma)} w_n)^e,$$

где $\{\alpha_i^{(\sigma)}\}$ — перестановки из $\{\alpha_i\}$, возникающие в связи с применением подстановок $\mathfrak{G}$, g — порядок $\mathfrak{G}$, e — такой наименьший показатель, что все коэффициенты $I(w)$ суть элементы K. Форма $I(w)$ неприводима. Подстановка

$$\begin{pmatrix} i \\ k_i \end{pmatrix}_w = \begin{pmatrix} w_1 \ldots w_n \\ w_{k_1} \ldots w_{k_n} \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда оставляет форму $I(w)$ неизменной, если транспонированная подстановка $\begin{pmatrix} i \\ k_i \end{pmatrix}'_a$ содержится в $\mathfrak{G}$. Таким образом, формой $I(w)$ группа Галуа $\mathfrak{G}$ вполне определяется.

Далее доказывается, что $I(w)$ есть неприводимый в $K[w]$ множитель формы

$$R(w) = \prod_{\sigma=1}^{n!-1} (w_0 + \alpha_1^{(\sigma)} w_1 + \ldots + \alpha_n^{(\sigma)} w_n),$$

имеющий степень $n!$, где σ пробегает все перестановки $\{\alpha_i\}$, а сама форма $R(w)$ — w-результант однородных в $K[w]$ форм:

$$\varphi_{01}(v) = v_1 + \ldots + v_n - a_1 v_0,$$
$$\varphi_{02}(v) = v_1 v_2 + \ldots + v_{n-1} v_n - a_2 v_0^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{0n}(v) = v_1 v_2 \ldots v_n - a_n v_0^n,$$
$$\varphi(v) = w_0 v_0 + w_1 v_1 + \ldots w_n v_n .$$

Исследование проводится в трех случаях. В случае $R = K$ результат такой. Пусть $p_i(\alpha) = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, M$) — заданные рациональные соотношения между корнями $P(x)$, $\varphi_i(v) = \varphi_i(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ — однородные формы кольца $K[v_0, v_1, \ldots, v_n]$, соответствующие многочленам $p_i(u) = p_i(u_1, \ldots, u_n)$ кольца $K[u_1, \ldots, u_n]$. Доказывается, что однородная система

$$\varphi_{01}(v) = 0, \ldots, \varphi_{0n}(v) = 0, \varphi_1(v) = 0, \ldots, \varphi_M(v) = 0 \quad (1)$$

имеет конечное число нормированных решений вида $\{1, \alpha_1^{(\sigma)}, \ldots, \alpha_n^{(\sigma)}\}$ и форма

$$E(w) = \prod_{\sigma=1}^{h} (w_0 + \alpha_1^{(\sigma)} w_1 + \ldots + \alpha_n^{(\sigma)} w_n)^{l_\sigma}$$

совпадает с наибольшим общим делителем системы w-результантов (1), причем $l_\sigma = 1$, если все $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ различны. Форма $E(w)$ есть собственный делитель w-результанта $R_w = R(w)$. В качестве формы $I(w)$, опре-

деляющей группу $\mathfrak{H}$, можно брать любой из неприводимых множителей $E(w)$. Тем самым облегчение при построении группы Галуа $\mathfrak{H}$, вызванное тем, что заранее задаются некоторые из нетривиальных рациональных соотношений между корнями $P(x)$, сводится к тому, что форма $E(w)$, неприводимыми множителями которой в указанном выше смысле определяется группа $\mathfrak{H}$, имеет меньшую чем $n!$ степень. Аналогичный результат получается и в случае, если $K \subset B$ — конечное алгебраическое расширение, с той лишь разницей, что степень формы $I(w)$, определяющей $\mathfrak{H}$, будет fg, $f > 1$.

Последний случай: R имеет конечную степень трансцендентности относительно K. Здесь уже дополнительно используется теория полиномиальных идеалов. Пусть заданы соотношения между корнями $g_i(\alpha) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, которые уловлетворяют требованиям:

а) $p_{0i}(u)^{\rho}$ для достаточно больших ρ входит в идеал $\mathfrak{q} = (q_1(u), \ldots, q_N(u))$ кольца $K[u]$;

б) из того, что $a_1(u)\,a_2(u) \in \mathfrak{q}$, $a_2(u)^m \in \mathfrak{q}$ всегда следует $a_1(u)^{m'} \in \mathfrak{q}$ $(m, m'$ — натуральные показатели). При этих условиях подстановка $\begin{pmatrix} i \\ k_i \end{pmatrix}_{\alpha}$ тогда и только тогда будет принадлежать к группе $\mathfrak{H}$, если выполнены условия

$$q_i(u_{k_1}, \ldots, u_{k_n})^{\rho} \equiv \sum_{k=1}^{N} q_{ik}(u_1, \ldots, u_n)\, q_k(u_1, \ldots, u_n). \quad (2)$$

Здесь ρ — достаточно большой показатель, $q_{ik}(u) \in K[u]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Из условия (2) вытекает, что радикал идеала $\mathfrak{q}$ выдерживает подстановку $\begin{pmatrix} i \\ k_i \end{pmatrix}_u$.

Присутствие показателя ρ, о природе которого ничего неизвестно, делает условия (2) мало пригодными на практике. Однако, если корни $P(x)$ различны, то $\rho = 1$. В этом случае справедливо следующее: если все корни $P(x)$ различны, то идеал $\mathfrak{A}_0 = (p_{01}(u), \ldots, p_{0M_0}(u)) \subset K[u]$ измерения d может быть представлен как пересечение собственного радикала и идеала меньшего измерения (здесь $p_{0i}(u)$ — многочлены кольца $K[u]$, которым соответствуют однородные формы $\varphi_{0i}(v) \in K[v]$). Значение идеала $\mathfrak{A}_0$ состоит в том, что с его помощью выражаются условия того, содержатся ли на самом деле среди существующих рациональных соотношений для корней $P(x)$ соотношения $q_i(\alpha) = 0$ или нет.

В заключение показывается, как в случае конечного трансцендентного расширения K построить $\mathfrak{H}$, исходя из так называемого основного многочлена идеала

$$\mathfrak{A} = (p_{01}(u), \ldots, p_{0M_0}(u),\ p_1(u), \ldots,\ p_M(u)).$$

Б. М. Уразбаев

5635. О линейных комбинациях корней. Фрид (Gyökök lineáris kombinációiról. Fried Ervin), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, 4, № 1, 155—162 (англ.)

Доказывается: Если $\alpha = c_1 a_1^{1/n_1} + \ldots + c_k a_k^{1/n_k} \neq 0$ есть минимальное представление в том смысле, что меньшее число слагаемых вида $c_i a_i^{1/n_i}$ не дает α, причем c_i и a_i принадлежат полю K, не содержащему других корней из 1 кроме ± 1, то $a_i^{1/n_i} \in K(\alpha)$. Этот результат применяется к решению поставленной Серпинским задачи об определении степени алгебраического числа $1 + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}$ над полем рациональных чисел. Эта степень равна $\Pr^{\mu(p)}$, где p пробегает все простые числа, меньшие n, $\mu(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi\left(\frac{n}{p^k}\right) + \delta_p$, $\pi(x)$ — число простых чисел $\leqslant x$, а $\delta_p = 0$, если $p \left| \left[\frac{\log n}{\log p} \right] \right.$, и $\delta_p = 1$ в противном случае.

И. Р. Шафаревич

5636. О числе циклических полей степени l^h. Уразбаев Б. М., Изв. АН КазССР, 1953, № 3(7), 51—57 (резюме казах.)

Доказывается теорема: Число всех циклических полей (над полем рациональных чисел) степени l^h и с дискриминантом

$$d = (p_1 \ldots p_{\alpha})^{l^{h-1}} (q_1 \ldots q_{\beta})^{l^{h-1}} \ldots (r_1 \ldots r_{\gamma})^{l^{h-1}},$$

где $p_i, q_j, \ldots, r_k$ — простые числа соответственно вида

$$l^h x_i + l^{h-1} y_j + 1, \ \ldots, \ lz_k + 1,$$

$$= (\varphi(l^h))^{\alpha-1} (\varphi(l^{h-1}))^{\beta-1} \ldots (\varphi(l))^{\gamma}.$$

Аналогичный результат получается и для d, делящегося на l. Доказательство основано на теореме Кронекера — Вебера.

Д. К. Фаддеев

5637. Об идемпотентных идеалах в бесконечных полях алгебраических чисел. Накано (Über idempotente Ideale in unendlichen algebraischen Zahlkörpern. Nakano Noboru), J. Sci. Hiroshima Univ. 1953, **17**, № 1, 11—20 (нем.)

Исследуются идемпотентные идеалы (т. е. идеалы, совпадающие со своим квадратом) в бесконечных алгебраических расширениях поля рациональных чисел. Доказывается, что простой идеал $\mathfrak{p}$ идемпотентен тогда и только тогда, когда в поле K существует подполе конечной степени K_1 с таким идеалом $\mathfrak{p}_1$, что в последовательности полей K_i, $\bigcup_i K_i = K$, $\mathfrak{p}_1$ делится на неограниченно растущую степень идеала $\mathfrak{p} \cap K_i$. Если $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^{m+1}$, то $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$. Любое из следующих трех условий необходимо и достаточно для того, чтобы простой идеал $\mathfrak{q}$ не был идемпотентным: 1) $\bigcap_i \mathfrak{p}^i = (0)$, 2) $\mathfrak{p}^{\lambda} \cap K_i = \mathfrak{p}_i^{\lambda}$ для достаточно большого i ($\mathfrak{p}_i$ — простой идеал поля K_i), 3) все принадлежащие $\mathfrak{p}$ примарные идеалы являются степенями $\mathfrak{p}$.

Если примарный идеал $\mathfrak{q}$, принадлежащий простому идеалу $\mathfrak{p}$, идемпотентен, то $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Идеал $\mathfrak{A}$ идемпотентен тогда и только тогда, когда все его изолированные примарные компоненты являются идемпотентными простыми идеалами.

И. Р. Шафаревич

5638. Применение условных символов Артина в теории полей классов. Редеи (Bedingtes Artinsches Symbol mit Anwendung in der Klassenkörpertheorie. Rédei Ladislaus), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, 4, № 1—2, 1—29 (нем.)

Пусть Ω — поле алгебраических чисел конечного порядка, H — идеальная группа в нем, порядок которой есть степень простого числа l, и Ω_H — соответствующее ей поле классов. Автор указывает регулярный прием для нахождения инвариантов H. Для этого он определяет условный символ Артина. Пусть K_n — циклическое расширение Ω степени l^n, содержащееся в Ω_H. Выберем $K_1 = K$, класс C из H и число n так, чтобы над K существовало хотя бы одно K_n и порядок f символа Артина $\left(\frac{K_n}{C}\right)$ являлся инвариантом H и был

бы $\leqslant l$. Тогда условный символ Артина $\left(\frac{K}{C}\right)_n = 1$, если $f = 1$, и $\left(\frac{K}{C}\right)_n = -1$, если $f = l$.

Далее автор рассматривает матрицу

$$M(n) = \left[\left(\frac{K^{(i)}}{C^{(k)}}\right)_n\right].$$

С помощью замены классов $C^{(s)}$ классами $(C^{(r)})^i C^{(s)}$ $r \neq s$, $i = 0, \ldots, l-1$, полей $K^{(s)}$ на $K' \subset K^{(r)}K^{(s)}$, $K' \neq K$, и перестановки столбцов и строк матрицу M можно привести к «диагональному» виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\ldots 1 \\ & \ddots & \\ 1 & 1 & 1\ldots 1 \\ 1\ldots 1 & -1\ldots & 1\ldots 1 \\ & \ddots & \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычеркивая в полученной матрице столбцы и строчки, содержащие -1, и увеличивая n до $n+1$, получим «производную» матрицу.

Пусть $n = 1$, классы $C^{(1)}, \ldots$ — образующие подгруппы элементов порядка $\leqslant l$, $K^{(1)}, \ldots$ — независимы и $K^{(1)}K^{(2)} \ldots > K$; исходя из матрицы M (1), можно образовать последовательность $M_1, \ldots, M_\nu$, в которой M_{i+1} является производной M_i, а производная M_ν пуста. Тогда l^ν является максимумом инвариантов группы H, а число столбцов M_i равно числу инвариантов H, делящихся на l^i. В этом и состоит основная теорема автора. А. И. Лапин

5639. О дифференцированиях и относительных дифферентах в коммутативных полях. Кинохара (On the derivations and the relative differents in commutative fields. Kinohara Akira), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A16**, № 3, 441—456 (англ.)

Пусть k — поле отношений коммутативной области целостности o, в которой выполняется основная теорема мультипликативной теории идеалов, K — конечное сепарабельное расширение поля k. Пусть $\mathfrak{O}$ — кольцо целых элементов K относительно o, $\mathfrak{A}$ — идеал $\mathfrak{O}$. Рассматриваются дифференцирования кольца $\mathfrak{O}$. Под этим названием понимаются отображения D кольца $\mathfrak{O}$ в $\mathfrak{O}/\mathfrak{A}$, удовлетворяющие требованиям:

1. $D(\alpha + \beta) = D(\alpha) + D(\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{O}$.
2. $D(\alpha\beta) = \beta D(\alpha) + \alpha D(\beta)$.
3. $D(a) = 0$ при $a \in o$.

Для дифференцирований естественным образом определяются операции сложения и умножения на элементы из $\mathfrak{O}$, так что множество дифференцирований становится $\mathfrak{O}$-модулем. Через $d_{\mathfrak{P}}$ обозначается наибольшая длина композиционного ряда $\mathfrak{O}$-модуля дифференцирований для идеалов $\mathfrak{A}$, являющихся степенями простого идеала $\mathfrak{P}$ кольца $\mathfrak{O}$. Устанавливается, что $d_{\mathfrak{P}}$ отлично от 0 лишь для конечного числа простых идеалов. Идеал $D_0(K/k) = \Pi\mathfrak{P}^{d_{\mathfrak{P}}}$ называется относительной дифферентой K/k, определяемой через дифференцирования. Устанавливается, что $D_0(K/k)$ совпадает с дедекиндовой дифферентой K/k.

Приводится непосредственное доказательство «теоремы о цепочке полей»: $D(K/k) = D(K'/k)\,D(K/K')$, где $k \subset K' \subset K$, и теоремы о делителях дифференты: Для $D_0(K/k) \subset \mathfrak{P}$ необходимо и достаточно, чтобы простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца o, делящийся на $\mathfrak{P}$, делился на $\mathfrak{P}^2$.

Статья является продолжением работы автора (J. Sci. Hiroshima Univ., 1952, **16**, 261—266), в которой решался аналогичный вопрос для полей алгебраических чисел. Д. К. Фаддеев

5640. Об алгебраических уравнениях, группа Галуа которых сверхразрешима. Пермутти (Sulle equazioni algebriche a gruppo di Galois supersolubile. Permutti Rodolfo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 181—184 (итал.)

Автор называет сверхразрешимой группой разрешимую группу, обладающую главным рядом, все факторы которого имеют простой порядок. Задается тот или иной вид радикального выражения и ищутся условия, при которых группа Галуа порожденного им поля сверхразрешима. Так, предполагается, что все корни некоторого уравнения имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i,\nu_i} + (a_{i,\nu_i-1} + \ldots + (a_{i,1}^{1/P_{i,1})} \ldots)^{1/P_{i,\nu_i-1}})^{1/P_{i,\nu_i}} \qquad (1)$$

и утверждается, что группа Галуа этого уравнения над полем, порожденным величинами $a_{i,j}$ и корнями степеней $p_{i,j}$ из 1, сверхразрешима тогда и только тогда, когда для любого i выполняется одно из следующих условий: α) $p_{i,1} = \ldots = p_{i,\nu_i}$; β) $p_{i,2} = \ldots = p_{i,\nu_i}$, $p_{i,1} \mid p_{i,2} - 1$.

По мнению референта, рассуждения автора неточны, так как автор предполагает, что группа Галуа поля, порожденного выражением (1), является прямым произведением групп Галуа полей, порожденных отдельными слагаемыми, что явно неверно.

Далее доказывается: если все корни некоторого уравнения имеют вид $\sqrt[p]{a + \sqrt[q]{b} + \sqrt[r]{c}}$, то группа Галуа этого уравнения сверхразрешима тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: α) $p = q + r$, β) $p = q$, $r \mid p-1$, γ) $p = r$, $q \mid p-1$, δ) $q = p-1$, $r \mid p-1$. И. Р. Шафаревич

5641. О кратчайшем представлении идеалов в бесконечных полях алгебраических чисел. Накано (Über die kürzeste Darstellung der Ideale im unendlichen algebraischen Zahlkörper. Nakano Noboru), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **17**, № 1, 21—25 (нем.)

Как показал Крулль, каждый идеал a в бесконечном алгебраическом расширении поля рациональных чисел представляется в виде пересечения своих изолированных примарных компонент: $a = \bigcap \mathfrak{q}_i$. Если при этом $\mathfrak{q}_i \supsetneq \bigcap_{t \neq i}\mathfrak{q}_t$ для любого i, то представление называется кратчайшим. Автор доказывает, что идеал обладает кратчайшим представлением тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: 1) число простых делителей a конечно; 2) для каждой изолированной примарной компоненты $\mathfrak{q}_i$ идеала a существует такое число r_i, что $a : (r_i) = \mathfrak{q}_i$. И. Р. Шафаревич

5642. Какие поля Галуа будут чистыми расширениями? Лоу, Зелинский (Which Galois fields are pure extensions? Lowe R. D., Zelinsky D.), Math. Student, 1953, **21**, № 1, 37—41 (англ.)

Пусть $q = p^n$ — степень простого числа, $GF(q)$ — конечное поле Галуа. Автор доказывает: для того чтобы $GF(q^f)$ было чистым расширением $GF(q)$, т. е. получалось из $GF(q)$ присоединением корня неприводимого уравнения $x^f = a$, где $a \in GF(q)$, необходимо и достаточно, чтобы $q - 1$ делилось на каждый простой множитель f. При этих условиях за a можно принять образующий элемент мультипликативной группы неравных нулю элементов $GF(q)$. А. И. Лапин

5643. ' **О корнях из единицы в поле K, циклическом степени l, над полем алгебраических чисел k, которые являются 1-σ-ми степенями чисел K, l — простое число, а σ — образующий автоморфизм K над k.** К а н ц (Su quelle radici dell'unità di un corpo K ciclico di grado l sopra un corpo algebrico k, le quali sono potenze (σ—1)-estime di numeri di K, essendo l numero primo e σ un automorfismo, generatore di K relativamente a k. K a n t z G i o r g i o), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 131—138 (итал.)

В циклическом расширении K/k простой степени поля алгебраических чисел k автор находит общий вид чисел α, для которых $\alpha^{1-\sigma}$ является корнем какой-либо степени из 1. Здесь σ означает образующий автоморфизм группы Галуа K/k. И. Р. Шафаревич

5644. Обратная функция $y=x^{-1}$ в комплексной полупростой алгебре. К а р б о н а р о (La funzione inversa $y=x^{-1}$ in'un'algebra complessa semi-semplice. C a r b o n a r o C a r m e l a M a r l e t t a), Boll. Accad Gioenia sci. nat. Catania, 1953, (4), 2, 195—201 (итал.)

5645. Алгебра, являющаяся бесконечной прямой суммой колец. С у ш к е в и ч А. К., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1952, 23, 49—60

Пусть $\mathbf{K}$ — данное коммутативное кольцо. Объекты, рассматриваемые в работе,— бесконечные последовательности вида $A=[a_1, a_2, a_3, \ldots, \text{in inf}]$, где $a_i \in \mathbf{K}$. Считая $B=[b_1, b_2, b_3, \ldots \text{in inf}]$, принимаются следующие постулаты:

I. $A=B$ тогда и только тогда, если при всяком λ $b_\lambda = a_\lambda$.

II. $A+B=[a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots \text{in inf}]$.

III. Умножение на скаляр: $cA=Ac=[a_1c, a_2c, \ldots \ldots \text{in inf}]$.

IV. $AB=[a_1b_1, a_2b_2, \ldots \text{in inf}]$. Из этих постулатов следует, что множество $\mathbf{A}$ всех рассматриваемых объектов — ассоциативная и коммутативная алгебра над кольцом. Последовательность $[0, 0, \ldots \text{in inf}]$ обозначается через 0. Из принятых постулатов следуют основные законы сложения и умножения. $\lim_{m\to\infty} \mathbf{A}_m = 0$, если для произвольного натурального числа n существует соответствующее ему число $M>0$, что при всяком $m>M$ первые n элементов в A_m равны нулю. $\lim_{m\to\infty} A_m = B$, если $\lim_{m\to\infty}(A_m - B)=0$.

Рассматриваются бесконечные произведения введенных объектов. Если $C=A\cdot B$, то C «делится» на $\mathbf{A}$ (и на B); если $A=[a_1, a_2, \ldots]$, $B=[b_1, b_2, \ldots]$, $C=[c_1, c_2, \ldots]$, то при всяком m $c_m = a_m b_m$, т. е. c_m делится на a_m; это условие и достаточно для делимости C на A. В $\mathbf{A}$ всегда имеются делители нуля, даже если $\mathbf{K}$ — область целостности. Радикал $\mathbf{P}$ алгебры $\mathbf{A}$ образуется всеми объектами $A=[a_1, a_2, \ldots]$, где a_n берутся всевозможными способами из радикала $\mathbf{R}$ кольца $\mathbf{K}$. Если $\mathbf{K}$ — полупростое кольцо, то и $\mathbf{A}$ — полупростая алгебра. Показывается, что $\mathbf{A}$ обладает бесконечными убывающими и возрастающими цепочками идеалов. Для особого случая, когда $\mathbf{K}$ — кольцо целых чисел, вводится понятие алгоритма Евклида для объектов из $\mathbf{A}$. В отличие от обычного алгоритма Евклида, здесь процесс деления может быть бесконечным. Общий наибольший делитель D получается в результате [illegible] перехода. Если D A, B, $=D$, то найдутся такие $X=[x_1, x_2, x_3, \ldots]$, $Y=[y_1, y_2, y_3, \ldots]$, что $AX+BY=D$. Если A и B взаимно просты, то разрешимо уравнение $AX+BY=E$. Показано, что для рассматриваемых объектов можно определить и алгоритм Эйлера. Далее рассматривается случай, когда для $\mathbf{A}$ под областью $\mathbf{K}$ понимается множество рациональных чисел. Отмечается, что алгебру $\mathbf{A}$ можно представить обычным (регулярным) способом при помощи матриц, ставя в соответствие каждому объекту $A=[a_1, a_2, \ldots]$ бесконечную диагональную матрицу, у которой по диагонали расположены элементы $a_1, a_2, \ldots$, т. е. алгебру $\mathbf{A}$ можно рассматривать как частный случай матричной алгебры над кольцом $\mathbf{K}$. В заключение показано, что алгебру $\mathbf{A}$ можно обобщить следующим образом: пусть дана последовательность коммутативных колец $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots$ in inf, $\mathbf{A}$ — множество объектов $A=[a_1, a_2, a_3, \ldots, \text{in inf}]$, где $a_n \in \mathbf{K}_n$ ($n=1,2,\ldots,\text{in inf}$).

В. И. Шнейдмюллер

5646. Характеристика неархимедовских нормирований через порядки величин. М о р и я (Charakterisierung der nicht-archimedischen Bewertungen durch Grössenordnungen. M o r i y a M i k a o), Math. J. Okayama Univ. 1953, 3, № 1, 29—38 (нем.)

Пусть задано нормированное тело K. Автор следующим образом определяет отношение $<$ для элементов из K:

0. $x<y$, если $v(x)\geqslant v(y)$ и $0<x$ для любого x из K. Из аксиом нормы нетрудно вывести, что:

1. Для любых x и y из K имеет место по крайней мере одно из соотношений $x<y$, $y<x$.

2. Из $x<y$ и $y<z$ следует $x<z$.

3. Из $x<y$ следует $xz<yz$ и $zx<zy$ при любом z из K.

4. Для любого натурального n выполняется $n1<1$ (1 — единица тела K).

5. Совокупность N всех элементов из K, бесконечно малых относительно 1, является непустой полугруппой по сложению.

(Элемент u из K называется бесконечно малым относительно элемента a из K, если все кратные элемента u меньше, чем a, но a не меньше ни одного кратного элемента u.)

Пусть теперь задано произвольное тело K, в котором определено отношение $<$, удовлетворяющее условиям 1—5. Доказывается, что в этом случае тело K можно единственным образом нормировать так, чтобы выполнялось условие 0. Я. В. Хион

5647. Замечания к теории метризованных полей и колец. Л а з а р (Bemerkungen zur Theorie der bewerteten Körper und Ringe. L a z a r d M i c h e l), Math. Nachr., 1954, 12, № 1—2, 67—73 (нем.)

Пусть в коммутативном кольце с единицей A для простого числа p, не являющегося делителем нуля, имеем $\bigcap_{k=1}^{\infty} p^k A=(0)$. В A может быть введена топология, если идеалы p^kA принять за полную систему окрестностей нуля. Если кольцо A полно в этой топологии, то оно называется p-адическим кольцом. Коммутативное кольцо R характеристики p называется совершенным, если отображение $x\to x^p$, $x\in R$, есть автоморфизм R.

Вместо известной конструкции Витта (Hasse H., Zahlentheorie, Berlin, 1949, § 10) автор предлагает новый способ построения единственного p-адического кольца A, для которого кольцо классов вычетов A/pA изоморфно данному совершенному кольцу R.

Без подробного доказательства указывается также метод построения (разветвленных) π-адических колец с данным совершенным кольцом классов вычетов. При этом кольцо B называется π-адическим, если: 1) π — не делитель нуля в B, 2) $\bigcap_{k=1}^{\infty} \pi^k B=(0)$, 3) $p\in \pi B$, 4) B полно в топологии, определяемой идеалами $\pi^k B$.

З. И. Боревич

5648. Теорема об унитарных группах над кольцами. Н о н о (A theorem on the unitary groups over rings.

ô n o Takayuki), J. Sci. Hiroshima Univ., 953, A17, № 2, 173—179 (англ.)

звестная теорема о том, что унитарная группа n, Q) над телом кватернионов Q изоморфна пересе-ию унитарной группы $U(2n, C)$ и симплектической ппы $Sp(2n, C)$ над полем комплексных чисел C, бщается на унитарные группы над любыми кольцами диницей и инволюцией. Для таких колец вводятся итарные группы, симплектические группы и расши-ия, связь которых с кольцом аналогична связи атернионов с комплексными числами. Если в каче-е исходного кольца R выбрать Клиффордову алгебру , то в качестве следствия из общего результата вы-кает, что унитарная группа $U(n, C_m)$ изоморфна ппе

$$U(2n, C_{m-1}) \cap Sp(2n, C_{m-1})$$

$$U(2n, C_{m-1}) \cap Sp(2n, C_{m-1}) =$$

$$= L(2n, C_{m-1}) \cap U(2n, C_{m-1}) =$$

$$= L(2n, C_{m-1}) \cap Sp(2n, C_{m-1}),$$

е $L(2n, C_{m-1})$ — подгруппа $GL(2n, C_{m-1})$, изоморф-я $GL(n, C_m)$ при некотором определенном соответст-и. Н. Я. Виленкин

49. О кольце эндоморфизмов векторного простран-ства и о теореме о нормальном базисе. К а ш (Über den Endomorphismenring eines Vektorraumes und den Satz von der Normalbasis. K a s c h F r i e d r i c h), Math. Ann., 1953, **126**, № 5, 447—463 (нем.)

Пусть K — нормальное расширение с группой $\mathfrak{G}$ по-я H. Известная теорема о существовании нормального азиса равносильна тому, что K, как правый R-модуль, ераторно изоморфно R. Здесь R обозначает кольцо, рожденное автоморфизмами из $\mathfrak{G}$ и операторами ножения на элементы H.

В работе дается следующее обобщение. Пусть — простое кольцо, H — его подкольцо с обрывом зрастающих и убывающих цепей такое, что: 1) H есть вокупность всех инвариантных элементов по отноше-ию к группе $\mathfrak{G}$ всех автоморфизмов K, не меняющих лементов H; 2) каждый элемент централизатора T ольца H есть сумма нескольких регулярных элемен-ов; 3) $(K:H) = \mathrm{Ord}(\mathfrak{G}/\mathfrak{F})\cdot(T:Z)$. Здесь $\mathfrak{F}$ — группа нутренних автоморфизмов, содержащихся в $\mathfrak{G}$. Уста-авливается (теорема 7), что если $\mathfrak{F} = 1$ или $T \subset H$, о кольцо K, как правый R-модуль, операторно изо-орфно R. Здесь R — кольцо операторов, порожденное лементами $\mathfrak{G}$ и операторами правого умножения на лементы H. Выводится ряд следствий. Устанавливается ряд теорем о строении кольца эндоморфизмов и его одколец для n-мерного пространства над данным кольцом H. Д. К. Фаддеев

5650. Полулинейные отображения и соотношение между рангами при нормальных расширениях. К а ш (Halblineare Abbildungen und die Rangrelation bei Galoisschen Erweiterungen. K a s c h F r i e d r i c h), Arch. Math., 1953, **4**, № 5/6, 402—407 (нем.)

Пусть A — простое кольцо, $\mathfrak{E}$ — его кольцо эндомор-физмов (как аддитивной группы без операторов). Каж-дому $a \in A$ отвечают операторы правого и левого умно-жения a^r и a^l. Эндоморфизм v называется полулиней-ным, если $a^r v = v(ag)^r$, где g — некоторый кольцевой автоморфизм, зависящий от v. Полулинейные эндомор-физмы имеют вид $v = gt^l$, где $t = 1 \cdot v$. Доказывается теорема: 1. Полулинейные эндоморфизмы $v_i = g_i t_i^l$ ли-нейно зависимы относительно A^r в том и только в том случае, когда соответствующие им автоморфизмы g_j связаны соотношениями $g_j = g_1 a_j^l (a_j^{-1})^r$, $a_j \in A$, и эле-менты $t_1 a_1, \ldots, t_n a_n$ линейно зависимы относительно центра Z кольца A. 2. Если R — двусторонний A^r-модуль, который порождается конечным числом полулинейных эндоморфизмов, то каждый его двусторонний A^r-подмодуль обладает этим же свойством.

В качестве одного из следствий устанавливается справедливость соотношения между рангами $(K:H) = \mathrm{Ord}(\mathfrak{G}/\mathfrak{F})\,(T:Z)$ (реф. 5649) для случая, если $\mathfrak{G}$ — инвариантное подкольцо H простого кольца K полупросто. Подобный результат для простого H был известен ранее. Д. К. Фаддеев

5651. Некоторые характеристики метризационных колец. А у б е р т (Some characterizations of valuation rings. A u b e r t K a r l E g i l), Duke Math. J., 1954, **21**, № 3, 517—525 (англ.)

Область целостности I называется метризационным кольцом, если в поле отношений кольца I существует метрика w (в смысле Крулля, с линейно упорядоченной абелевой группой значений), для которой I будет кольцом целых элементов (т. е. $w(x) \geqslant 0$ тогда и только тогда, если $x \in I$). Метрика поля называется дискретной, если соответствующая ей группа значений, рассматриваемая как топологическая группа, дискретна.

В работе дается характеристика метризационных колец в терминах теории r-идеалов Прюфера — Лоренцена (Lorenzen P., Math. Z., 1939, **45**, № 4, 533—553). Область целостности I является метризационным кольцом тогда и только тогда, если выполнено одно из следующих условий: 1) каждый s-идеал в I является d-идеалом (идеалом в смысле Дедекинда); 2) каждый s_v-идеал в I является d-идеалом; 3) каждый s-идеал в I является v_s-идеалом; 4) каждый s_v-идеал в I является v_s-идеалом; 5) каждый s_v-идеал в I является v-идеалом. Далее, чтобы область целостности I была метризационным кольцом с дискретной метрикой, необходимо и достаточно, чтобы каждый s-идеал в I был v-идеалом. Если каждый s-идеал области целостности I главный, то в этом и только в этом случае группа значений соответствующей метрики есть аддитивная группа целых чисел. З. И. Боревич

5652. Радикал в обобщенных Q-кольцах. А н д р у н а к и е в и ч В. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, **18**, № 5, 419—426

Рассматриваются обобщенные Q-кольца, т. е. такие топологические кольца, в которых обобщенно-радикальные элементы образуют открытое множество. Доказано, что в обобщенном Q-кольце радикал в смысле Брауна — Маккоя замкнут и что обобщенное Q-кольцо, не содержащее замкнутых присоединенных идеалов, отличных от самого кольца и от единицы, является или присоединенно-простым или простым кольцом с единицей (а следовательно, его центр представляет из себя или радикальное кольцо или поле). Если ограниченное в смысле Шафаревича обобщенное Q-кольцо обладает полной системой групповых окрестностей нуля, то его радикал есть открытое множество, причем если такое кольцо полупросто, то оно дискретно, откуда, в частности, следует что компактное нульмерное полупростое обобщенное Q-кольцо конечно.

Отдельные результаты работы (например, теорема о замкнутости радикала в обобщенном Q-кольце) пересекаются с результатами, полученными независимо и другими методами (без использования присоединенного умножения) в работе Исеки (Iseki K., C. r., Acad. sci., 1952, **234**, 1938—1939). Л. И. Головина

5653. О целозамкнутости. Б а т с, Х о л л, М а н н. (On integral closure. B u t t s H u b e r t, H a l l M a r s h a l l Jr., M a n n H. B.), Canad J. Math., 1954, **6**, № 4, 471—473 (англ.)

Пусть J есть целозамкнутая область целостности с единицей, F — ее поле отношений.

Доказываются следующие утверждения:

1. Если многочлен $f(x) = ax^m + \cdots + a_m$ из кольца $J[x]$ разложим на множители в $F[x]$, то многочлен $af(x)$ разложим в $J[x]$ (обобщение леммы Гаусса).

2. Кольцо многочленов $J[x]$ целозамкнуто.

3. Пусть p — простой идеал J; $\overline{J} = J/p$;

$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_i \in J$; $\overline{f}(x) = x^n + \overline{a}_1x^{n-1} + \cdots + \overline{a}_n$, где $\overline{a}_i = a_i p \in \overline{J}$; $\overline{F}$ — поле отношений $\overline{J}$. Если многочлены $f(x)$ и $\overline{f}(x)$ не имеют кратных корней, то группа Галуа многочлена $\overline{f}(x)$ над $\overline{F}$ изоморфна подгруппе группы Галуа многочлена $f(x)$ над F (ранее аналогичное утверждение было известно для J с однозначным разложением на простые множители). З. И. Боревич

5654. Общая теория радикалов. II. Радикалы в кольцах и бикатегориях. III. Приложения. А м и ц у р (A general theory of radicals. II. Radicals in rings and bicategories. III. Applications. A m i t s u r S. A.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 1, 100—125, 126—136 (англ.)

Первая часть этой серии работ (см. Amer. J. Math., 1952, **74**, 774—786) развивалась на языке теории структур. Реферируемые вторая и третья части в основном посвящены общей теории радикалов в кольцах. Работа имеет ряд перекрытий с работой референта «Радикалы колец и алгебр» (Матем. сб., 1953, **33**, № 1, 13—26, РЖМат, 1955, 1680), хотя ни одна из этих работ не покрывается другой.

В реферируемой работе, помимо радикальных свойств колец, рассматриваются более общие свойства, сохраняющиеся при гомоморфизмах, и при помощи такого свойства строится радикал по образцу нижнего радикала Бэра. Рассматривается вопрос об условиях, при которых такой радикал содержит все односторонние идеалы с этим свойством, об условиях, при которых пересечение радикала кольца с идеалом будет радикалом этого идеала, разыскивается радикал кольца матриц над данным кольцом и т. д.

В качестве приложений приведены обобщение радикала Бэра на неассоциативные кольца, новый вывод свойств радикалов Джекобсона, Левицкого и т. д. Указаны также некоторые новые радикалы ассоциативных колец, в частности радикал, определяемый следующим радикальным свойством: всякий гомоморфный образ кольца таков, что любой его правый не ниль-идеал содержит идемпотент.

Заметим, что высказанное в предисловии к третьей части предположение, что радикал Бэра является самым «минимальным» среди радикалов ассоциативных колец, обобщающих классический радикал колец с условием минимальности для односторонних идеалов, на самом деле ошибочно, как показано в отмеченной выше работе референта. А. Г. Курош

5655. Алгебры, порождаемые линейными функциями. У э й н е р (Algebras based on linear functions. W e i n e r L. M.), Math. Mag., 1954, **28**, № 1, 9—12 (англ.)

Если на множестве элементов некоторой алгебры A определена линейная функция $f(x)$ со значениями в основном поле F, то можно в A определить новую операцию

$$x \cdot y = f(y)\,x + f(x)\,y + xy,$$

относительно которой и сложения множество элементов A образует алгебру A'.

Доказываются следующие необходимые и достаточные условия, при которых из принадлежности A к некоторому классу алгебр следует принадлежность A' тому же классу: 1) $f(x)f(y) = -f(xy)$, если A ас циативна и ранга $n > 1$; 2) $f(xy) = f(yx)$, если A ассоциативна и ранга $n > 1$; 3) $[f(x^2)f(x) + f(x)] x - [f(x)^2 + f(x^2)]\,x^2 = 0$, если A — алгебра с ассоциативными степенями над полем характеристики ну Следующее предложение дает способ построения пр стых алгебр с ассоциативными степенями:

Если A антикоммутативная алгебра и f — функци имеющая ненулевое значение хотя бы для одного э мента из произвольного идеала B алгебры A, то A' простая алгебра с ассоциативными степенями.

А. И. Ширш

5656. Независимость условий ассоциативности. С (Az asszociativitásfeltételek függetlensége. S z á G á b o r), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. köz 1953, **3**, № 4, 569—577 (венг.)

Статья автора (РЖМат, 1954, 2895) на венгерск языке.

5657. Об алгебрах Ньюмена. В о е н а к а (On Ne man algebra. W o o y e n a k a Y u k i), Proc. J pan Acad., 1954, **30**, № 3, 170—175 (англ.)

Известная система аксиом Ньюмена определяет а гебраическую систему, являющуюся прямым произв дением булевой алгебры и (вообще говоря, неассоци тивного) булева кольца. В настоящей работе авт предлагает следующую систему аксиом, определя щую алгебраическую систему K, которая является пр мым произведением булевой алгебры K_1 и ассоциати ного булева кольца K_2 с единицей: 1. K непуст 2. Если a, $b \in K$, то однозначно определен элеме $a + b \in K$. 3. $a + b = b + a$. 4. Если a, $b \in K$, то одн значно определен элемент $ab \in K$. 5. $a(bc) = b(ca$ 6. $a(b + c) = ab + ac$. 7. Каждому $a \in K$ соответству по крайней мере один элемент $a' \in K$. 8. $a + b'b = 9.$ $a(b' + b) = a$.

Булева алгебра определяется системой аксиом 1— и $10_1 : a + a = a$, булево кольцо с единицей — систем аксиом 1—9 и $10_2 : a + a = 0$. Доказывается, что акс омы каждой из этих систем независимы.

Л. И. Головин

5658. Булевы алгебры и тела множеств. Э н о м о т (Boolean algebras and fields of sets. E n o m o t S h i z u), Osaka Math. J., 1953, **5**, № 1, 99—11 (англ.)

Подмножество R булевой алгебры A, не содержащее 0 называется разветвленным, если: 1) для любых дву элементов $x, y \in R$ выполняется одно из следующи соотношений — либо $x \cap y = 0$, либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$ 2) для любого элемента $x \in R$ множество элементо $y \in R$, больших x, является вполне упорядоченным причем каждое его подмножество обладает наибольши элементом. Разветвленное множество R_1 предшествуе разветвленному множеству R_2, если $R_1 \subseteq R_2$ и дл любых двух элементов $x \in R_1$ и $y \in R_2 \setminus R_1$ либо $x \cap y = 0$, либо $x > y$. Так определенное отношени порядка делает множество всех разветвленных мно жеств булевой алгебры A частично упорядоченным причем любое разветвленное множество можно попол нить до максимального разветвленного множества.

Тело множеств F называется вполне аддитивным (в. а.) в широком смысле (в ш. с.), если какова бы н была совокупность подмножеств S_μ ($\mu \in \Delta$) из F и существования в F наименьшего подмножества S, со держащего все S_μ, следует, что S совпадает с теоре тико-множественной суммой $S = \Sigma_{\mu\in\Delta} S_\mu$. Если, кром того, накладывается одно из следующих двух допол нительных требований: мощность множества индексо Δ не превышает некоторого кардинального числа и или $S_\mu \cap S_{\mu'} = \varnothing$ ($\varnothing$ — пустое подмножество) дл

$\neq \mu'$, то тело множеств F называется соответственно σ-аддитивным в ш. с. и слабо в. а. в ш. с.

Конечно-аддитивная функция f, определенная на булевой алгебре A и принимающая лишь два значения 0 и 1, называется сильно в. а. в ш. с. двузначной мерой на A, если $f(\bigcup_{\mu\in\Delta} a_\mu)=0$ как только $f(a_\mu)=0$ для каждого $\mu\in\Delta$ и $\bigcup_{\mu\in\Delta} a_\mu$ существует. Вводятся также понятия сильно σ-аддитивной в ш. с. двузначной меры и в. а. в ш. с. двузначной меры.

Булева алгебра A называется вполне дистрибутивной в ш. с., если каковы бы не были непустые множества Θ_ν, где индекс ν пробегает непустое множество Δ — из существований $\bigcup_{\mu\in\Theta_\nu} a_\mu^\nu$ $(a_\mu^\nu\in A)$ для всех ν $\bigcap_{\nu\in\Delta}(\bigcup_{\mu\in\Theta_\nu} a_\mu^\nu)$ и $\bigcap_{\nu\in\Delta} a_{f(\nu)}^\nu$ следует существование $\bigcup_{f(\nu)\in[\Theta\nu]^\Delta}(\bigcap_{\nu\in\Delta} a_{f(\nu)}^\nu)$ и равенство $\bigcap_\nu\{\bigcup_{\mu\in\Theta_\nu} a_\mu^\nu\}=\bigcup_{f(\nu)\in\Theta_\nu{}^\Delta}(\bigcap_{\nu\in\Delta} a_{f(\nu)}^\nu)$; $[\Theta_\nu]^\Delta$ обозначает совокупность всех функций f, определенных на Δ и удовлетворяющих условию $f(\nu)\in\Theta_\nu$. Вводится понятие σ-дистрибутивной структуры в ш. с.

Используя разветвленные множества, автор доказывает следующую теорему 3.1, в которой содержится решение проблемы, поставленной Хорном и Тарским (Horn A., Tarski A., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 64, 465—49): Для булевой алгебры A следующие утверждения эквивалентны: 1) булева алгебра A изоморфна в. а. в ш. с. телу множеств; 2) для любого отличного от 0 элемента $a\in A$ существует на A такая сильно в. а. в ш. с. двузначная мера f, что $f(a)=1$; 3) булева алгебра A атомная; 4) булева алгебра A вполне дистрибутивна в ш. с.

Теорема 3. 1 сбобщается следующей теоремой 3.2: Для булевой алгебры A следующие два утверждения эквивалентны: 1) булева алгебра A изоморфна σ-аддитивному в ш. с. телу множеств; 2) для любого отличного от 0 элемента $a\in A$ существует на A такая сильно σ-аддитивная в ш. с. двузначная мера f, что $f(a)=1$. Каждое из этих утверждений влечет утверждение 3) булева алгебра A σ-дистрибутивна в ш. с. В случае, когда мощность любого разветвленного множества булевой алгебры A не превышает $\aleph_1$, утверждения 1) —3) и утверждение 4) булева алгебра A атомная, эквивалентны. Приводится пример булевой алгебры, для которой справедливо утверждение 3), но не справедливы ни одно из утверждений 1) и 2).

Подмножество I булевой алгебры A, не содержащее 0, называется точечной компонентой (т. к.), если оно упорядочено, причем любое его подмножество обладает наибольшим элементом, и 0 является единственным элементом, меньшим всех элементов из I. $I_1\leqslant I_2$, если для каждого элемента $x\in I_1$ найдется такой элемент $x'\in I_2$, что $x\geqslant x'$. Если $I_1\leqslant I_2$ и $I_2\leqslant I_1$, то $I_1\sim I_2$. Пусть R_λ $(\lambda\in\Lambda)$ — совокупность всех максимальных разветвленных множеств булевой алгебры A. В каждом R_λ выберем, содержащуюся в R_λ т. к. I_λ. Система т. к. $(I_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)$ образует точку, если $\bigcap_{i=1}^n x_i\neq 0$ для произвольного конечного множества элементов $x_i\in\Sigma_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$; точки p и p' совпадают, если $I_\lambda\sim I'_\lambda$ для каждого λ. Совокупность всех точек p обозначается через S. Определяется отображение φ_Λ, ставящее в соответствие каждому элементу $a\in A$ подмножество $\varphi_\Lambda(a)$ всех таких точек p множества S, что для некоторой системы $(I_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)$, определяющей точку p, существует элемент $x\in\Sigma_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, удовлетворяющий условию $a\geqslant x$. Доказывается, что следующие утверждения эквивалентны: 1) булева алгебра A изоморфна слабо в. а. в ш. с. телу множеств; 2) для каждого отличного от 0 элемента $a\in A$ существует на A такая в. а. в ш. с. двузначная мера f, что $f(a)=1$; 3) отображение $\varphi_\Lambda(a)$ определяет изоморфное отображение булевой алгебры A на тело множеств. Отмечается, что утверждение 3) справедливо, если булева алгебра A атомная.

В последних двух параграфах формулируются для σ-полных булевых алгебр ряд теорем, являющихся частными случаями теоремы 3.2, а также для сепарабельных булевых алгебр указывается ряд утверждений, эквивалентных утверждению, что A — атомная булева алгебра; булева алгебра A называется сепарабельной, если в A существует такое счетное подмножество D, что для любого отличного от 0 элемента $a\in A$ в D существует элемент x, удовлетворяющий условию $a\geqslant x$.

Е. Г. Шульгейфер

5659. О расщепляемых структурах. Балачандран (On disjunction lattices. Balachandran V. K.), J. Madras Univ., 1953, **23**, № 1, 14—21 (англ.)

В работе предполагается, что рассматриваемые структуры обладают нулем и единицей.

Структура L называется расщепляемой, если она дистрибутивна и для каждых двух определенных элементов a и b существует элемент c такой, что из двух элементов ac и bc один $=0$, а другой $\neq 0$. Если L есть булева алгебра, a и b — элементы из L, $a\prec, \neq b$, и a' — дополнение a, то $a'b\neq 0$ (иначе $b\prec(a')'=a$, что невозможно). Следовательно, булева алгебра есть расщепляемая структура. Показано, что класс расщепляемых структур шире класса булевых алгебр.

Элемент m из L называется минимальным (атомом) если $m\neq 0$ и из $a\prec m$ следует $a=0$ или $a=m$.

Теорема 1. Дистрибутивная структура L, имеющая аддитивный базис из минимальных элементов (атомов), расщепляема.

Автор считает, что принципиальные результаты работы содержатся в следующих двух теоремах:

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы дистрибутивная структура L была расщепляемой, является следующее: каждый простой μ-идеал $P_\mu(a)$ из L должен быть нормальным, т. е $P''_\mu(a)=P_\mu(a)$.

Теорема 3. Для того чтобы структура L была расщепляемой, необходимо и достаточно, чтобы каждый главный μ-идеал из L был произведением всех минимальных простых μ-идеалов, содержащих его

В. И. Шнейдмюллер

См. также: 5535 К, 5551,5590, 5716, 5761, 6001, 6063, 6071, 6088, 6108, 6109

ТОПОЛОГИЯ

5660. Об обобщении равномерных структур и пространств. Тамари (On a generalization of uniform structures and spaces. Tamari D.), Bull. Res. Council Israel, 1954, **3**, № 4, 417—428 (англ.)

Рассматривается некоторое обобщение вейлевских равномерных структур и пространств, заключающееся в отказе от требования симметрии. Система Ф подмножеств «квадрата» $E\times E$ некоторого данного множе-

ства E называется квазиордоформной базой, если: 1) каждое $A \in \Phi$ содержит все диагональные точки (x, x), $x \in E$, 2) для любых $A \in \Phi$ и $B \in \Phi$ существует такое $C \in \Phi$, что $C \subseteq A \cap B$, 3) для каждого $A \in \Phi$ существует такое $B \in \Phi$, что $BB \subseteq A$, где BB состоит из всех пар $(x, y) \in E \times E$, для каждой из которых имеется такое $t \in E$, что $(x, t) \in B$ и $(t, y) \in B$. Структуры и пространства, соответствующие такому определению базы, называются квазиордоформными. Изложение построено в том же плане, как и в §§ 1—4 из гл. 2 книги Бурбаки (Bourbaki N., Topologie générale, Paris, 1942). Ю. М. Смирнов

5661. **Обобщение теоремы Асколи. Накано** (A generalization of Ascoli's theorem. Nakano Hidegorô), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 4, 282—284 (англ.)

Вопреки названию работа посвящена не доказательству нижеследующего обобщения теоремы Асколи, которое, повидимому, доказано в предыдущих работах автора, а выяснению условий, при которых наислабейшая структура множества R вполне ограничена (Обобщенная теорема Асколи: для любой двойной системы отображений $f_{\alpha\beta}$, $\alpha \in A_\beta$, $\beta \in \Theta$, абстрактного множества R в равномерные пространства Y_β существует самая слабая изо всех таких равномерных структур множества R, в каждой из которых любая система $h_\alpha = \{f_{\alpha\beta}\}$ равностепенно непрерывна). Оказывается (теорема 2), что эта структура вполне ограничена в том случае, если каждое множество $f_{\alpha\beta}(R)$ вполне ограничено в Y_β для любых $\alpha \in A_\beta$, $\beta \in \Theta$ и если при этом для каждого индекса β существует такая вполне ограниченная структура множества A_β (состоящего из индексов α), в которой система отображений $s_{\beta x} = f_{\alpha\beta}(x)$ (при фиксированных β и $x \in R$) пространства A_β в Y_β равностепенно непрерывна. Ю. М. Смирнов

5662. **О расширениях топологических пространств. Нёбелинг** (Über die Erweiterungen topologischer Räume. Nobeling Georg), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 243—244 (нем.)

Топологическое пространство R' называется расширением топологического пространства R, если R является плотным подмножеством в топологии пространства R' и если для каждого $M \subseteq R$ всякое открытое в M относительно топологии R множество будет открыто в M и относительно топологии R'. Множество всех расширений пространства R распадается на классы: расширения R' и R'' эквивалентны, если каждую ограниченную, непрерывную действительную заданную на R функцию, продолжаемую непрерывно на R', можно непрерывно продолжить на R'', и наоборот. Устанавливается взаимно однозначное соответствие между этими классами расширений и теми кольцами ограниченных непрерывных действительных (определенных на R) функций, которые содержат все константы и замкнуты относительно равномерной сходимости. Ю. М. Смирнов

5663. **Некоторые теоремы распространения для непрерывных отображений. Майкл** (Some extension theorems for continuous functions. Michael Ernest), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 4, 789—806 (англ.)

Абсолютным (абсолютным окрестностным) экстензором $AE(\alpha)$ ($ANE(\alpha)$) относительно класса α топологических пространств называется всякое такое топологическое пространство Y, что для любого топологического пространства $X \in \alpha$ и любого замкнутого в X множества $A \in \alpha$ всякое непрерывное отображение множества A в Y можно непрерывно продолжить на все X (на некоторую окрестность множества A). Абсолютным (абсолютным окрестностным) ретрактом $AR(\alpha)$ ($ANR(\alpha)$) относительно класса α топологических пространств называется всякое такое пространство Y, что для любого топологического пространства $X \in \alpha$, содержащего Y в качестве замкнутого подпространства, тождественное отображение подпространства Y на себя можно продолжить в непрерывное отображение всего X (некоторой окрестности множества Y) в Y. Если за класс α принять класс всех метризуемых или класс всех паракомпактных, или класс всех нормальных, или, наконец, класс всех совершенно нормальных пространств, то (2:4) для каждого метризуемого пространства Y утверждения «Y есть $AE(\alpha)$ (соответственно $ANE(\alpha)$)» и «Y есть $AR(\alpha)$ (соответственно $ANR(\alpha)$)» эквивалентны. Целью работы является доказательство теоремы 3:1: Пусть метризуемое пространство Y является $AE(ANE)$ относительно класса метризуемых пространств; тогда a) Y является $AE(ANE)$ относительно класса паракомпактных и совершенно нормальных пространств; b) Y является $AE(ANE)$ относительно класса паракомпактных пространств тогда и только тогда, когда Y топологически полно; c) Y является $AE(ANE)$ относительно класса совершенно нормальных пространств тогда и только тогда, когда Y имеет счетную базу; d) Y является $AE(ANE)$ относительно класса нормальных пространств тогда и только тогда, когда Y имеет счетную базу и топологически полно; e) Y является $AE(ANE)$ относительно класса вполне регулярных пространств тогда и только тогда, когда Y состоит всего лишь из одной точки. В силу утверждения 2:4 всюду, кроме последнего утверждения e), в этой теореме вместо AE и ANE можно поставить AR и ANR. Утверждение e) заменится тогда следующим: e') Y является $AR(ANR)$ относительно класса вполне регулярных пространств тогда и только тогда, когда Y — компактно (локально-компактно и имеет счетную базу). Ю. М. Смирнов

5664. **О ханнеризации двух счетно паракомпактных нормальных пространств. Исеки** (On hannerisation of two countably paracompact normal spaces. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 6, 443—444 (англ.)

Пусть X и Y — нормальные пространства, B — замкнутое в X множество, а f — непрерывное отображение множества B в Y. Ханнеризацией пространств X и Y (при данных B и f) называется пространство Z, элементы которого получаются из теоретико-множественной (свободной) суммы $X \cup Y$ идентификацией каждой точки $y \in Y$ со всеми точками $x \in f^{-1}(y)$, а топология задается следующим образом: множество $U \subseteq Z$ по определению открыто в Z, если множество всех $x \in X$ «из» U открыто в X и множество всех $y \in Y$ из U открыто в Y. Доказывается, что ханнеризация двух счетно паракомпактных нормальных пространств является счетно паракомпактным нормальным пространством. Аналогичные утверждения были доказаны ранее для классов нормальных, паракомпактных, совершенно нормальных и наследственно нормальных пространств. Ю. М. Смирнов

5665. **Об одном свойстве отображений метрических пространств. Исеки** (On a property of mappings of metric spaces. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 7, 570—571 (англ.)

Доказывается, что если метрическое пространство Y является ANE относительно наследственно нормальных пространств (ср. реф. 5663), то Y топологически полно. Отмечается, что с помощью результата предыдущей работы автора (реф. 5664) можно доказать это же утверждение для метрических ANE относительно сильнопаракомпактных пространств, а с помощью

ного результата Каплана (Kaplan S., Trans. Amer. ath. Soc., 1947, **62**, 248—271) можно доказать это же тверждение для метрических *ANE* относительно ально паракомпактных (во всякое открытое покрытие ожно вписать открытое звездно конечное покрытие) ространств. Заметим, что вместо *ANE* автор пишет *ES* — neighborhood extension space. Ю. М. Смирнов

5666. Ретрагирование метрических и неметрических пространств. Ханнер (Retraction of metric and non-metric spaces. Hanner Olof), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 227 (англ.)

Высказываются следующие утверждения: а) если компакт Y есть AR (ANR) (реф. 5663) относительно класса компактов, то Y есть AR (ANR) и относительно класса метрических пространств со счетной базой; б) если метрическое пространство Y со счетной базой есть AR (ANR) относительно метрических пространств со счетной базой, то Y есть AR (ANR) и относительно класса метрических пространств; в) метрическое пространство Y, являющееся AR (ANR) относительно класса метрических пространств, тогда и только тогда есть AR (ANR) относительно класса паракомпактных пространств, когда оно топологически полно; г) метрическое пространство Y, являющееся AR (ANR) относительно класса метрических пространств, тогда и только тогда есть AR (ANR) относительно класса нормальных пространств, когда оно топологически полно и имеет счетную базу; д) метрическое пространство Y, являющееся AR (ANR) относительно класса метрических пространств, тогда и только тогда является AR (ANR) относительно класса вполне регулярных пространств, когда оно компактно (локально-компактно со счетной базой). Первые утверждения не представляют затруднений; последние три доказаны Майклом (реф. 5663).

Ю. М. Смирнов

5667. Симметрическое произведение топологических пространств. Гаия (Produse simetrice de spatii topologice. Ganea Tudor), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1954, **4**, № 11-12, 561-563 (рум.; резюме русс., франц.)

Излагаются некоторые результаты, подробно и с доказательствами изложенные в другой работе этого же автора (РЖМат, 1955, 3109). Ю. М. Смирнов

5668. Непрерывность в терминах связности. Фань Цюй, Страбл (Continuity in terms of connectedness. Fan Ky, Struble Raimond A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 2, 161—164; Indagationes math., 1954, **16**, № 2, 161—164 (англ.)

Отображение f топологического пространства E в топологическое пространство E^* называется отображением, сохраняющим связность, если оно обладает следующими свойствами:

1) образ связного множества связен;

2) для любого замкнутого множества $A^* \subset E^*$ и любой точки $x \in E \setminus f^{-1}(A^*)$ найдется окрестность точки x, пересекающаяся не более чем с конечным числом компонент множества $f^{-1}(A^*)$.

Всякое непрерывное отображение сохраняет связность. Для решения обратного вопроса автор вводит следующие условия.

Условие I. E имеет такую открытую базу, что для любого множества U из базы множество $E \setminus U$ имеет конечное число компонент.

Условие II. E имеет такую открытую базу, что для любого множества U из базы множество $E \setminus \bar{U}$ имеет конечное число компонент.

Условие III. Граница каждого множества из открытой базы пространства E имеет конечное число компонент.

Условие IV. Граница каждого множества из открытой базы пространства E бикомпактна.

Для того чтобы сохраняющее связность отображение было непрерывным, достаточно выполнения одного из следующих условий: а) E^* удовлетворяет условию I и каждая точка из E^* замкнута; б) E^* регулярно и удовлетворяет условию II; в) E локально связано, E^* удовлетворяет условию III и каждая точка из E^* замкнута, г) E и E^* локально связны и E^* удовлетворяет условию IV.

А. Д. Тайманов

5669. Пример двух множеств, ни одно из которых не содержит непрерывного образа другого. Грот (Example of two sets neither of which contains a continuous image of the other. Groot J. de), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 5, 525—526; Indagationes math., 1954, **16**, № 5, 525—526 (англ.)

Доказано, что если X — связное локально связное множество, не содержащее никакого континуума, а Y — неразложимый континуум, каждый подконтинуум которого также является неразложимым, то при всяком непрерывном отображении множества X в Y и множества Y в X, образ состоит из одной точки.

А. С. Пархоменко

5670. Об одной лемме Сунучи и Яно. Накамура (On a lemma of Sunouchi and Yano. Nakamura Masahiro), Kōdai Math. Sem. Repts., 1953, № 4, 127—128 (англ.)

Доказывается следующее очевидное предложение: Пусть S — бикомпакт и T — такой его гомеоморфизм на себя, что множество $\{T^n(a)\}$ $(n = 1, 2, 3\ldots)$ всюду плотно в S для любой точки $a \in S$. Тогда для любого открытого множества $N \subset S$ можно указать такое целое число k, зависящее только от N, что $T^k(a) \in N$ какова бы ни была точка $a \in S$. В случае, когда S есть окружность длины 1, а T — поворот окружности на иррациональный угол, это предложение было доказано Сунучи и Яно в их работе об абсолютной сходимости функциональных рядов (Sunouchi G., Yano S., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, 380—389).

Автор замечает, что аналогичное предложение справедливо и в том случае, когда вместо одного гомеоморфизма T и его степеней рассматривается однопараметрическая группа гомеоморфизмов пространства S.

М. И. Грабарь

5671. Плоские континуумы, допускающие непериодические автогомеоморфизмы с равностепенно-непрерывными итерациями. Хеммингсен (Plane continua admitting non-periodic autohomeomorphisms with equicontinuous iterates. Hemmingsen E.), Math. scand., 1954, **2**, № 1, 119—141 (англ.)

Рассматриваются свойства плоского континуума M по отношению к семейству итераций f^n $(n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots)$ гомеоморфного отображения f континуума M на себя в предположении, что семейство отображений $\{f^n\}$, $(n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots)$ равностепенно непрерывно.

Если континуум M имеет внутренние точки, то существует простая замкнутая линия, содержащаяся в открытом ядре множества M и являющаяся инвариантной по отношению к некоторой итерации f^m отображения f (теоремы 3.1 и 3.2). Гомеоморфное отображение f множества M на себя называется периодическим, если существует такое $m \neq 0$, что f^m есть тождественное отображение. Точка p множества M называется периодической, если существует такое $m \neq 0$, что $f^m(p) = p$.

Если K — простая замкнутая линия, содержащаяся в открытом ядре множества M, которая инвариантна по

отношению к некоторой итерации отображения f и содержит периодическую точку относительно f, то существует итерация отображения f, оставляющая неподвижными все точки компоненты открытого ядра множества M, содержащей линию K (теорема 4.1).

Если компонента W открытого ядра множества M содержит непериодическую точку, то $\overline{W} = M$, причем множество M гомеоморфно кругу или круговому кольцу, а отображение f (или его квадрат — в случае кольца) эквивалентно (при этом гомеоморфизме) повороту на иррациональный угол (теорема 5.1).

Если одна из компонент открытого ядра множества M состоит из периодических точек, то все внутренние точки множества M являются периодическими (теорема 5.2). Строится пример множества M, все внутренние точки которого являются периодическими по отношению к отображению f, тогда как само отображение f не является периодическим.

В конце работы показано, что если p — точка плоского континуума M и замыкание множества $\{f^n(p)\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ связно, то M есть либо круг, либо круговое кольцо, либо простая замкнутая линия, а отображение f имеет тот же вид, что и в теореме 5.1. А. С. Пархоменко

5672. Плоские континуумы и гомеоморфизмы с равностепенно-непрерывными непериодическими итерациями. Хеммингсен (Plane continua and homeomorphisms thereof with equi-continuous, non periodic iterates. Hemmingsen Erik), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 228—229 (англ.)

Краткое сообщение о работе того же автора (см. реф. 5671). А. С. Пархоменко

5673. Некоторые теоремы о спиралях на плоскости. Болл (Some theorems concerning spirals in the plane. Ball B. J.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 1, 66—80 (англ.)

Все рассмотрения этой статьи относятся к плоскости. Лучом называется замкнутое множество, являющееся топологическим образом прямолинейного луча. Дуга t называется спирально спускающейся к точке O, если не существует никакой конечной последовательности лучей, исходящих из точки O и обладающих следующими свойствами: первый луч последовательности не имеет с дугой t никаких других общих точек, кроме O; последний луч является прямолинейным; никакие два соседние луча последовательности не имеют других общих точек, кроме O. Дуга t, спирально спускающаяся к некоторой точке, наз. спиралью. Множество, не содержащее спиралей, называется спирально свободным.

Основными результатами статьи являются следующие. Доказывается существование компактного вполне несвязного замкнутого множества, обладающего тем свойством, что всякая дуга, содержащая это множество, спирально спускается к каждой точке некоторого несчетного множества. Для того чтобы компактное вполне несвязное замкнутое множество M было подмножеством спирально свободной дуги, достаточно чтобы проекция множества M на некоторую прямую была вполне несвязным множеством.

Для того чтобы компактное вполне несвязное замкнутое множество M было подмножеством спирально свободной дуги, достаточно, чтобы M содержалось в сумме G спирально свободных попарно не пересекающихся дуг, удовлетворяющих следующим условиям: 1) если рассматривать эти дуги как элементы непрерывного разбиения множества G, то пространство, порожденное этим разбиением, вполне несвязно, 2) топологический предел последовательности элементов этого разбиения также есть элемент разбиения; 3) для всякого ε существует такое δ, что если x и y — две точки одной из рассматриваемых дуг, находящиеся на расстоянии, меньшем δ, то диаметр интервала xy этой дуги меньше ε. А. С. Пархоменко

5674. Эффективное определение связного локально связного плоского множества, не содержащего никакого континуума. Болэнд (An effective definition of a connected, locally connected and punctiform plane set. Boland J. Ch.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 5, 522—524; Indagationes math., 1954, **16**, № 5, 522—524 (англ.)

Строится пример указанного в заглавии множества. А. С. Пархоменко

5675. Несколько теорем топологии плоскости. Поэнару (Cîteva propoziţiide topologie a planului. Poenaru Valentin), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1954, **6**, № 3, 579—593 (рум.; резюме русс., франц.)

Исследуются некоторые свойства конечных систем жордановых плоских областей, попарно не имеющих общих точек.

Теорема I. Не существует системы, состоящей из пяти попарно не пересекающихся плоских жордановых областей, границы каждых двух из которых имеют не менее трех общих точек.

Теорема II. Пусть D_1, D_2, D_3 — три попарно не пересекающиеся жордановы области с границами $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, удовлетворяющие условиям: 1) пересечение $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ содержит не менее двух общих точек; 2) пересечение $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3$ содержит по крайней мере одну точку P. Тогда или точка P отделена от бесконечности множеством $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2 \cup \overline{D}_3$, или одна из областей D_1, D_2, D_3 отделена от бесконечности объединением двух других областей. А. С. Пархоменко

5676. Семейства кривых. Стейн (Families of curves. Stein S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 745—747 (англ.)

Доказывается следующее предложение, являющееся обобщением теоремы Форрестера о семействах кривых (Forrester A., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 333—334).

Пусть S^n — сфера, E — ограниченный ею шар, P — точка сферы S^n, а I — отрезок $[0, 1]$. Пусть, далее, $\varphi : S^n \to S^n$ — периодическое отображение с периодом, отличным от единицы. Если отображение $F : S^n \times I \to E$ удовлетворяет условиям: а) $F(P, 0) = P$, б) $F(P, 1) = F(\varphi(P), 1)$, то $F(S^n \times I) = E$.

В числе применений теоремы дано необходимое и достаточное условие того, чтобы компактное множество A евклидова пространства было выпуклым и имело с каждой опорной плоскостью только одну общую точку. С. С. Рышков

5677. О функциях, не принимающих постоянных значений на связных многоточечных множествах. Полак А. И., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 2, 213—215

Автор называет отображение $f : G \to R'$ вполне открытым, если f открыто и $f(G)$ открыто в R'.

Теорема 2: Пусть непрерывное отображение f области G локально-компактного метрического пространства R в локально-связное метрическое пространство R' обладает тем свойством, что полный прообраз $f^{-1}(y)$ не содержит никакого связного подмножества ($y \in R'$). Тогда, если к f равномерно сходится последовательность вполне открытых в G отображений f_n, то полные прообразы $f_n^{-1}(y)$ сходятся (если не пусты) к полному прообразу $f^{-1}(y)$, $y \in R'$. В. А. Ефремович

5678. Инвариантность типа узла. Мойс (The invariance of the knot-types. Moise Edwin E.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 242—243 (англ.)

Краткое содержание первых шести параграфов
тьи автора (см. РЖМат, 1955, 1696). В. А. Ефремович

9. **Доказательство предложения Хопфа о нумера-
ции вершин произвольного бесконечного графа. К а-
у ц а** (Beweis einer Vermutung von Herrn H. Hopf
ber die Numerierung der Eckpunkte gewisser unendli-
her Graphen. K a l u z a Th. J r), Arch. Math.,
955, **6**, № 2, 157—158 (нем.)

Устанавливается следующее свойство бесконечных
афов, имеющих конечный порядок (граф имеет ко-
ный порядок, если к каждой его вершине примыкает
нечное число звеньев). В каждом связном бесконечном
афе G, имеющем конечный порядок, можно вершины
умеровать так, что для каждой вершины найдется
ледняя вершина с бо́льшим номером. Как отмечает
тор, указанное предложение было высказано Хопфом.
С. В. Яблонский

**30. Замечание о перечислении всех деревьев,
содержащихся в связном линейном графе. Т р е н т**
A note on the enumeration and listing of all possible
rees in a connected linear graph. T r e n t H o r a-
e M.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**,
№ 10, 1004—1007 (англ.)

Дается способ перечисления всех деревьев, которые
держатся в данном конечном связном графе G и
держат все его вершины.

Пусть граф G имеет $\nu+1$ вершин и β ребер, кото-
е обозначены соответственно через $n_1, n_2, \ldots, n_{\nu+1}$
$b_1, b_2, \ldots, b_\beta$. Ориентируем каждое ребро b_i произ-
льным образом и обозначим через π_{ij} коэффициент
цидентности $[b_i : n_j]$. Выбросив из прямоугольной
трицы $\| \pi_{ij} \|$ один столбец (например, последний),
лучим матрицу N. Оказывается, что определитель
адратной матрицы $T = N'N$ порядка ν (N' — матрица,
лучаемая из N транспонированием) равен искомому
слу деревьев. Элементы матрицы $T = \| t_{ij} \|$ могут
же быть описаны следующим образом: t_{ii} есть
сло ребер графа G, инцидентных вершине n_i; t_{ij}
ть (при $i \neq j$) взятое со знаком минус число ребер,
единяющих вершины n_i и n_j.

Несколько изменив формулировку теоремы, можно
лучить не число деревьев, а полное их перечисление.
В заключение автор приводит двойственные форму-
ировки теорем (перечисляются не сами деревья, а их
ополнения). В. Г. Болтянский

**31. Решения нерефлексивных отношений. Р и-
ч а р д с о н** (Solutions of irreflexive relations. R i-
c h a r d s o n M o s e s), Ann. Math., 1953, **58**,
№ 3, 573—590 (англ.)

Пусть $\mathfrak{D}$ — непустая область двухместного отноше-
ия $\succ$, которое предполагается нерефлексивным (ни
ля какого $x \in \mathfrak{D}$ не имеет места соотношение $x \succ x$).
истеме $(\mathfrak{D}, \succ)$ соответствует ориентированный граф
$_0$ с множеством D вершин: вершины x и y соединены
аправленным отрезком (от x к y), если $x \succ y$. Реше-
ием графа G_0 (или соответствующего иррефлексив-
ого отношения) называется такое множество $V \subset D$,
то: 1) из условия $x \in V$ и $y \in V$ следует $x \not\succ y$ и
) для любого $y \in D \setminus V$ найдется такое $x \in V$, что
$\succ y$. В реферируемой статье обобщаются факты,
олученные Нейманом (Neuman J. von, Morgenstein O.,
heory of games and economic behavior, Princeton,
944), а также автором (Bull. Amer. Math. Soc., 1946,
2, 113—116).

Т е о р е м а 1. Если конечный ориентированный граф
$_0$ не содержит нечетных ориентированных циклов, то
ешение существует. Далее приводятся модификации
еоремы 1 (теоремы 2 и 3).

В случае бесконечных графов устанавливается ряд тео-
ем, требующих различных дополнительных ограниче-
ний. Конечная или бесконечная последовательность раз-
личных вершин $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ графа G_0 называется
регрессией, если $x_{i-1} \prec x_i$ $(i = 2, 3, \ldots)$. Если каждая
регрессия графа G_0 конечна, то граф называется
регрессивно конечным, в противном случае — регрес-
сивно бесконечным. Граф G_0 называется регрессивно
ограниченным относительно вершины $y \in G_0$, если
число вершин, входящих в регрессии, начинающиеся
в вершине y, ограничено. Наконец, граф G_0 называет-
ся регрессивно ограниченным, если он регрессивно
ограничен относительно каждой из своих вершин.

Т е о р е м а 5. Если ориентированный граф G_0 регрес-
сивно ограничен и не содержит нечетных ориентиро-
ванных циклов, то решение G_0 существует.

Условие регрессивной ограниченности заменяется в
других теоремах иными условиями (например, в теоре-
ме 10 условием регрессивной конечности графа G_0). При
этом в доказательстве теорем 8—10 используется
трансфинитная индукция.

П р и м е ч а н и е р е ф е р е н т а. 1. При доказатель-
стве леммы 2 (ч. II, стр. 580) допущена ошибка:
пункт c) не имеет места. (Исправление этой по-
грешности см. Ann. Math., 1954, **60**, № 3, 595).
Однако, как отмечает и автор, внесенное измене-
ние не влияет на изложение последующего. 2. Дока-
зательство леммы 10 (стр. 586) неполно, хотя легко
исправимо. С. В. Яблонский

**5682. Теоремы о расширении решений иррефлексив-
ных отношений. Р и ч а р д с о н** (Extension theo-
rems for solutions of irreflexive relations. R i c h a r d-
s o n M o s e s), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1953,
39, № 7, 649—655 (англ.)

Даются достаточные условия для возможности рас-
ширения решения подсистемы $(\mathfrak{D}_0, \succ)$ в решение си-
стемы $(\mathfrak{D}, \succ)$, где $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}$ (реф. 5681).

Пусть G — граф системы $(\mathfrak{D}, \succ)$, а G_0 — граф под-
системы $(\mathfrak{D}_0, \succ)$; множество вершин графа G совпадает
с $\mathfrak{D}$ (реф. 5681). Через $D^{-1}(x, G \setminus G_0)$ обозначается
множество всех таких вершин $y \in G \setminus G_0$, что $y \succ x$.
Далее, для произвольного множества $X \subset \mathfrak{D}$ положим:

$$D^{-1}(X, G \setminus G_0) = \bigcup_{x \in X} D^{-1}(x, G \setminus G_0);$$

$$D^{-n}(X, G \setminus G_0) = D^{-1}(D^{-n+1}(X, G \setminus G_0), G \setminus G_0), n > 1;$$

$$P(X, G \setminus G_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D^{-n}(X, G \setminus G_0).$$

Через $D(X, G)$ обозначается множество всех вершин
$y \in G$, которым предшествует хотя бы одна вершина
$x \in X$. Предшественником-последовательностью
$p(x_0, G \setminus G_0)$ называется такая регрессия (см. реф. 5681)
$x_0, x_1, x_2, \ldots$ максимальной длины (конечной или бес-
конечной), что все ее вершины, кроме, быть может, x_0,
лежат в $G \setminus G_0$. Предшественник-последовательность
называется нетривиальной, если она содержит члены,
отличные от x_0.

Т е о р е м а 1. Пусть V_0 — решение графа G_0. Пред-
положим, что: 1) все нетривиальные предшественники
последовательности $p(x_0, G \setminus G_0)$, $x_0 \in G_0$, или беско-
нечны, или, будучи конечными, имеют нечетную
длину при $x_0 \in W_0 = \mathfrak{D}_0 \setminus V_0$ и четную длину при
$x_0 \in V_0$; 2) $D(V_0, G) \cap D^{-2n}(V_0, G \setminus G_0) = D(V_0, G) \cap$
$\cap D^{-2n+1}(W_0, G \setminus G_0) = 0$ для всех $n \geq 0$; 3) если
$h \geq 0$ и $k \geq 0$ имеют одинаковую четность, то
$D^{-h}(V_0, G \setminus G_0) \cap D^{-k}(W_0, G \setminus G_0) = 0$, а если $h \geq 0$
и $k \geq 0$ имеют разную четность, то $D^{-h}(V_0, G \setminus G_0) \cap$
$\cap D^{-k}(V_0, G \setminus G_0) = D^{-h}(W_0, G \setminus G_0) \cap D^{-k}(W_0, G \setminus G_0) = 0$;
4) любая вершина из $G \setminus G_0$ лежит в $P(\mathfrak{D}_0, G \setminus G_0)$.
Тогда множество $V = V_0 \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} D^{-2n}(V_0, G \setminus G_0))$

$\cup(\cup_{n=1}^{\infty} D^{-2n+1}(W_0, G \setminus G_0))$ есть решение графа G и расширение решения V_0.

Теоремы 2—11 представляют собой дополнения, варианты и аналоги теоремы 1. Г. Н. Поваров

5683. 1-факторы ориентированных графов. Татт (The 1-factors of oriented graphs. Tutte W. T.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 6, 922—931 (англ.)

Статья представляет собой развитие предыдущих работ автора (J. London Math. Soc., 1947, 22, 107—111; Canad. J. Math., 1950, 1, 44—49).

1-фактором ориентированного графа G называется такой его подграф, который содержит все вершины графа G, причем каждая вершина является началом ровно одного и концом ровно одного ребра этого подграфа.

В работе устанавливается необходимое и достаточное условие отсутствия 1-факторов в локально конечном графе, которое можно сформулировать следующим образом: в графе должны существовать непересекающиеся конечные подмножества вершин S и T, обладающие свойствами:

1) не существует такого пути $(\overrightarrow{a_0a_1})(\overrightarrow{a_1a_2})\ldots(\overrightarrow{a_{n-1}a_n})$, что $a_0, a_n \in T$, $a_i \notin S (i = 1, 2, \ldots, n-1)$; не существует таких бесконечных путей

$(\overrightarrow{b_0b_1})(\overrightarrow{b_1b_2})\ldots(\overrightarrow{b_{n-1}b_n})\ldots$ и $(\overleftarrow{c_0c_1})(\overleftarrow{c_1c_2})\ldots(\overleftarrow{c_{n-1}c_n})\ldots$, что $b_0, c_0 \in T$; $b_i, c_i \notin S (i > 0)$;

2) число элементов множества S меньше числа элементов множества T.

В качестве простого следствия сформулированного результата автор получает необходимое и достаточное условие отсутствия аналогов 1-факторов у неориентированных локально-конечных графов. Автор указывает, что в частном случае, когда множество вершин графа можно разбить на два таких непересекающиеся подмножества, что начало и конец каждого ребра суть элементы разных подмножеств, его результат совпадает с результатом Холла и Радо (Hall P., J. London Math. Soc., 1934, 10, 26—30; Rado R., Quart. J. Math., 1949, 20, 95—104). О. Б. Лупанов

5684. К теории хроматических многочленов. Татт (A contribution to the theory of chromatic polynomials. Tutte W. T.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 1, 80—91 (англ.)

Рассматривается задача раскраски графов, представляющая собой обобщение задачи раскраски географических карт. Кратко излагаются основные понятия теории графов. Подграф, содержащий все вершины графа, называется покрывающим. Отображение f множества вершин графа G в кольцо Q_n вычетов по модулю n называется n-раскраской графа G, если для любых вершин x и y, которые не совпадают и служат двумя концами одного и того же ребра, выполняется неравенство $f(x) \neq f(y)$. Пусть $P(G, n)$ — число n раскрасок графа G. Тогда для графа без петель $P(G, n) = \Sigma_S (-1)^{\alpha_1(S)} n^{p_0(S)}$, где суммирование ведется по всем покрывающим подграфам S графа G, $\alpha_1(S)$ есть число ребер в S и $p_0(S)$ есть число компонент подграфа S. Для графа с петлями $P(G, n) = 0$. Функция $P(G, n)$ называется хроматическим многочленом графа G.

Одномерная цепь g графа G по области коэффициентов Q_n называется цветной, если $g(A) \neq 0$ для каждого ребра $A \in G$. Пусть $\theta(G, n)$ — число цветных кограниц в G над Q_n, а $\varphi(G, n)$ — число цветных циклов. Тогда $\theta(G, n) = n^{-p_0(G)} P(G, n)$. Если G и G^* суть двойственные графы на сфере, то $\varphi(G^*, n) = \theta(G, n)$. Поэтому гипотеза четырех красок равносильна каждому из следующих двух недоказанных предложений: 1) $\theta(G, 4) > 0$, если G — плоский граф без петель; 2) $\varphi(G, 4) > 0$, если G — плоский граф без перешейков (перешейком называется ребро, не принадлежащее ни одному циклу). Обобщая предложение 2) на графы общего вида, автор формулирует следующие гипотезы: I. существует такое положительное целое m, что $\varphi(G, n) > 0$, если $n \geqslant m$ и в G нет перешейков; II. $\varphi(G, n) > 0$, если $n \geqslant 5$ и в G нет перешейков. Доказывается, что если $\varphi(G, n) > 0$, то $\varphi(G, n+1) > 0$ (первый шаг к проверке гипотезы I).

Далее определяются понятия внутренне активного и внешне активного ребер графа относительно покрывающего дерева. Эти понятия связаны с нумерацией ребер графа. Вводится функция $\chi(G, x, y)$, обобщающая функции $\theta(G, n)$ и $\varphi(G, n)$ и называемая дихроматом графа G. Для связного G по определению $\chi(G, x, y) = \Sigma_T x^{r(T)} y^{s(T)}$, где $r(T)$ и $s(T)$ суть соответственно числа внутренне и внешне активных ребер относительно T и суммирование ведется по всем покрывающим деревьям в G. Доказывается, что дихромат связного графа не равняется тождественно 0 и не изменяется при перенумерации ребер графа. В случае несвязного графа его дихромат есть произведение дихроматов компонент. Доказывается, что $\chi(G, x, y)$ есть многочлен степени $\alpha_0(G) - p_0(G)$ относительно x и степени $\alpha_1(G) - \alpha_0(G) + p_0(G)$ относительно y (где $\alpha_0(G)$ — число вершин графа G). Устанавливаются некоторые свойства дихроматов, в частности, соотношения:

$$\theta(G, n) = (-1)^{\alpha_0(G) - p_0(G)} \chi(G, 1-n, 0);$$

$$\varphi(G, n) = (-1)^{\alpha_1(G) - \alpha_0(G) + p_0(G)} \chi(G, 0, 1-n).$$

Дихромат можно считать обобщением числа $C(G)$ покрывающих деревьев графа G, ибо $C(G) = \chi(G, 1, 1)$. Число $C(G)$ важно для теории электрических цепей в которых все провода имеют единичную проводимость (Brooks R. L., Smith C. A. B., Stone A. H., Tutte W. T., Duke Math. J., 1940, 7, 312—340). Таким образом, теория покрывающих деревьев обнаруживает связь между теорией раскраски графов и теорией электрических цепей. Г. Н. Поваров

5685. Расслоения с вполне несвязными слоями. Мостерт (Fibre spaces with totally disconnected fibres. Mostert Paul S.), Duke Math. J., 1954, 21, № 1, 67—74 (англ.)

Приводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы расслоенное пространство в смысле Хопфа было произведением Эресмана — Фельдбау. Аналогичное условие было дано Гриффином (РЖМат, 1955, 642), на работу которого автор ссылается.

В качестве приложения показано, что если $\mathfrak{B}$ — косое произведение с линейно-связной базой B и вполне несвязным слоем, то группа G этого косого произведения может быть уменьшена до замыкания (в G) группы, которая алгебраически изоморфна некоторой факторгруппе фундаментальной группы $\pi_1(B)$. В частности, косое произведение с линейно-связной односвязной базой эквивалентно прямому произведению, если его слой (или группа) вполне несвязен. Приведены также некоторые простые приложения указанных теорем к выяснению структуры связных локально-компактных конечномерных групп. В. Г. Болтянский

5686. О спектрально-сингулярных группах гомологии. Чогошвили Г. С. Сообщ. АН Груз. ССР, 1953, 14, № 10, 583—588

Определение предельной группы прямого спектра бикомпактных групп, ранее предложенное автором для прямых спектров с единственными гомоморфизмами, переносится на прямые спектры с многими гомоморфизмами, что позволяет определить, следуя методу Гуревича, Дугунджи, Доукера (W. Hurewicz, J. Dugundji, C. H. Daw-

), сингулярные группы гомологий с бикомпактной группой коэффициентов. Следует отметить, что указанные выше авторы, так и другие топологи, например, Эйленберг и Стинрод, отрицали возможность определения сингулярных групп гомологий бикомпактной группой коэффициентов.
М. М. Постников

7. О характеристике n-мерных χ-однородных симплициальных комплексов. **Ваккаро** (Sulla caratteristica dei complessi simpliciali n-dimensionali χ-omogenei. Vaccaro Michelangelo), Trans. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 261—262 (итал.)
Размерно однородный симплициальный комплекс называется χ-однородным, если окрестностный комплекс любого его симплекса имеет ту же эйлерову характеристику, что и сфера соответствующей размерности. Работа является кратким сообщением (резюме доклада) о некоторых результатах, касающихся эйлеровой характеристики χ-однородных комплексов.
М. М. Постников

8. Об обратных цепных отображениях. **Йонеда** (On the inverse chain maps. Yoneda Nobuo), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, 1954, 7, № 1, 33—67 (англ.)
Известный обратный гомоморфизм (Umkehrhomomorphismus) групп гомологий многообразий определяется ячно с помощью барицентрических звезд. Автор дает му гомоморфизму геометрическое определение (без пользования упорядочивания вершин) и доказывает новные его свойства. Кроме того, обратный гомоморфизм определяется для многообразий с границей даже для некоторых более общих случаев).
М. М. Постников

9. Абстрактные клеточные комплексы. **Уайли** (Abstract cell complexes. Wylie Shaun), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 267—268 (англ.)
Несколько кратких замечаний о гомологиях бесконечных абстрактных комплексов. М. М. Постников

10. О двумерных асферических комплексах. **Кокрофт** (On two dimensional aspherical complexes. Cockcroft Wilfred Halliday), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 207—208 (англ.)
Сформулированы результаты, полное доказательство которых уже опубликовано (РЖМат, 1955, 3671).
М. М. Постников

11. О гомотопических группах букетов сфер. **Хилтон** (On the homotopy groups of the union of spheres. Hilton Peter John), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 230—231 (англ.)
Краткое сообщение, в котором излагается идея вычисления всех гомотопических групп любых букетов сфер. Утверждается, что q-мерная гомотопическая группа букета, состоящего из n сфер размерности $p>1$, изоморфна прямой сумме системы групп, которая для любого $k>0$ содержит $k^{-1}\sum_{d/k}\mu(d)\,n^{k/d}$ групп, изоморфных группе $\pi_q(S^{k(p-1)+1})$.
М. М. Постников

5692. О принадлежащей Блейкерсу и Масси теореме вырезания для триад. **Араки** (On the triad excision theorem of Blakers and Massey. Araki Shôrô), Nagoya Math. J., 1953, 6, 129—136 (англ.)
Используя пространства путей, автор дает новое доказательство известной теоремы вырезания для триад, впервые доказанной Блейкерсом и Масси (Blakers A. L., Massey W. S., Ann. Math., 1952, 55, 192—201).
М. М. Постников

5693. Обобщение одной теоремы де Рама и интегральное выражение инварианта Хопфа. **Кервер** (Generalization of a theorem of G. de Rham and expression of Hopf invariant as an integral. Kervaire Michel), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 234 (англ.)
Краткое сообщение. Более подробное изложение опубликовано ранее (РЖМат, 1954, 5490).
М. М. Постников

5694. О когомологиях комплексных аналитических многообразий. **Дольбо** (Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes. Dolbeault Pierre Ernest), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 210 (франц.)
Краткое сообщение, в котором излагаются опубликованные ранее результаты автора (РЖМат, 1953, 130; 1954, 2060).
М. М. Постников

5695. Одна точная последовательность в теории комплексных аналитических многообразий. **Гуггенхеймер** (Une suite exacte dans la théorie des variétés analytiques complexes. Guggenheimer Heinrich), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 224—225 (франц.)
Краткое сообщение, посвященное некоторым алгебраическим аспектам теории Ходжа групп когомологий келеровых многообразий.
М. М. Постников

См. также: 5629, 5937, 6097, 6609

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

96. К общей теории $(r-1)$-мерной меры в r-мерном пространстве. **Де-Джорджи** (Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. De Giorgi Ennio), Ann. mat. pura ed appl., 1954, 36, 191—213 (итал.)
Дается развернутое изложение результатов, основные из которых были опубликованы ранее (РЖМат, 54, 3652). Теоремы 1 и 2 предыдущей статьи получаются как частные случаи двух новых аналогичных теорем, в которых вместо $\varphi(x\,|\,E)$ и $P(E)$ рассматриваются ограниченная функция $f(x)(x\in S_r)$ и $J[f(x)]$, причем $J[f(x)]$ определяется аналогично $P(E)$ и $P(E)=J[\varphi(x\,|\,E)]$.
А. А. Конюшков

97. Новое определение k-мерного ориентированного многообразия и k-мерной меры множества в r-мерном пространстве. **Де-Джорджи** (Una nuova definizione di varietà k-dimensionale orientata, e di misura k-dimensionale di un insieme di uno spazio r-dimensionale. De Giorgi Ennio), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 111 (итал.)
Относительно $(r-1)$-мерной меры в r-мерном пространстве см. реф. 5696.

5698. Связи между свойством пересечения и другими свойствами мер. **Шерф** (Connections between an intersection property and other properties of measures. Schaerf Henry M.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 168 (англ.)
Приводится краткое резюме доклада, в котором под свойством пересечения меры m при отношении R между

некоторыми множествами понимается следующее: если $m(A)\,m(B)>0$, то существуют такие $A'\subset A$, $B'\subset B$, что $m(A')\,m(B')>0$ и для A', B' определено отношение R. Из других свойств меры отмечаются, в частности, свойства инвариантности и единственности.

5699. **Об аппроксимации по мере борелевских множеств F_σ-множествами. Безикович** (On approximation in measure to Borel sets by F_σ-sets. Besicovitch A. S.), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 3, 382—383 (англ.)

Рассматривается вопрос, поставленный Эрдёшем: Для всякого ли борелевского множества E справедливо представление $E=A+R$, где A — множество типа F_σ, а R имеет хаусдорфову размерность 0.

Автор на примере показывает, что такое представление, вообще говоря, невозможно. И. Е. Жак

5700. **Ограниченные функции. Мейер** (On restricted functions. Meyer Burnett), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 1, 29—30 (англ.)

Отмечаются некоторые элементарные свойства ограниченности и неограниченности в предельной точке для функций, определенных на произвольном множестве числовой прямой. П. И. Романовский

5701. **Об одном виде (C)-свойства функций. Вайнберг М. М.**, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, 21, 65—72

Пусть B — измеримое множество s-мерного евклидова пространства. Рассматривается действительная функция $g(u_1,\ldots,u_n,\ x)\ (-\infty<u_i<\infty,\ x\in B)$, почти при всех $x\in B$ непрерывная по совокупности остальных переменных и измеримая по x при фиксированных значениях остальных переменных. Статья в основном посвящена доказательству двух утверждений:

1. Функция $g[u_1(x),\ldots,u_n(x),\ x]$ измерима, если измеримы функции $u_i(x)$.

2. Каждому $\eta>0$ соответствует такое замкнутое множество $F\subset B$, что $\operatorname{mes}F>\operatorname{mes}B-\eta$, причем при $-\infty<u_i<\infty$, $x\in F$ функция $g(u_1,\ldots,u_n,\ x)$ непрерывна по совокупности переменных.

Примечание референта. В условиях, рассматриваемых в статье, функция $g(u_1,\ldots,u_n,\ x)$ изучалась Каратеодори (Caratheodory C. Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig, 1927), который в промежуточных рассуждениях доказал и первое утверждение (Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II, М., 1954, 121).

Второе утверждение в качестве вспомогательной леммы, независимо от автора, установлено также Л. А. Ладыженским и референтом (РЖМат, 1955, 3798). Доказательство в реферируемой статье неполно, так как не показана измеримость множеств $E_{\varepsilon m}$.

М. А. Красносельский

5702. **О теореме Генри Блумберга. Гофман** (On a theorem of Henry Blumberg. Goffman Casper), Michigan Math. J., 1953—1954, 2, № 1, 21—22 (англ.)

Доказывается, что существует такое взаимно однозначное отображение интервала $I=(0,1)$ на себя, что для любого всюду плотного в I множества E отображение f не гомеоморфно отображает E на $f(E)$. Показывается также, что существуют множество $S\subset I$, пересечение которого с любым интервалом в I несчетно, и действительная функция f, определенная на S, такие, что для любого всюду плотного в S множества E функция f имеет в E точку разрыва относительно E. Л. Д. Кудрявцев

5703. **Функции Помпейю. Маркус** (Funcţiile lui Pompeiu. Marcus S.), Studii şi cercetări mat., 1954, 5, № 3—4, 413—419 (рум.; резюме русс., франц.)

С некоторыми дополнениями излагается прим Помпейю (Pompeiu D., Math. Ann., 1907, 63, 326) стро возрастающей всюду дифференцируемой функции ограниченной производной, имеющей всюду плотн множество нулей. А. А. Конюшк

5704. **О равномерной сходимости непрерывных фун ций. Якубик** (O rovnomernej konvergencii spo tých funkcií. Jakubík Ján), Mat.-fyz. časop 1954, 4, № 3, 154—161 (словац.; резюме русс.)

Пусть M — группа (по отношению к сложению) вс непрерывных функций на $[0,1]$. Для $M_1\subset M$ обозн чаются через $\overline{M}_1$, $\widetilde{M}_1$ замыкания M_1 в M соответствен в смысле сходимости в каждой точке и в смысле равн мерной сходимости. Пусть $g(M_1)$ — подгруппа, пор жденная множеством M_1.

Строится множество $Z\subset M$ линейно независимы функций с $\overline{Z}=M$, $\widetilde{Z}=Z$, $g(Z)\neq M$. А. А. Конюшк

5705. **Компактность последовательностей функций дифференцируемость предельной функции. Пучч** (Compattezza di successioni di funzioni e derivabilit delle funzioni limiti. Pucci Carlo), Ann. ma pura ed appl., 1954, 36, 1—25 (итал.)

Работа является обобщением и развитием друго работы автора (РЖМат, 1954, 4775). Пусть S_r — евкл дово пространство r измерений. Рассматриваются е подмножества и действительные функции на них.

Примем определения реф. 4775, распространив их общий случай множеств $A_n\subset S_r$. Исследование в зн чительной степени основывается на следующей обо щенной теореме Больцано—Вейерштрасса.

Последовательность множеств E_n содержит подпосл довательность, сходящуюся к замкнутому множеству если множества E_n равномерно ограничены, то мн жество E непусто.

Пусть $f_n(x)$ — функция, определенная на $A_n\subset S$ $(n=1,2,\ldots)$.

Последовательность $\{f_n\}$ вдвойне расходится (bid verge) к $+\infty$ в точке x', принадлежащей нижнему пр делу последовательности $\{A_n\}$, если для любого числ k можно найти положительные δ и N такие, чт $f_n(x)>k$ при $n>N$, $x\in A_n$, $\overline{xx'}<\delta$. Аналогичн определяется вдвойне расходимость к $-\infty$.

Отметим следующие теоремы:

Теорема I. Если последовательность $\{f_n\}$ вдвойн сходится на множестве A к f, то f непрерывна на A (Аналогичная теорема при $A_n=A$ принадлежит Хан (Hahn H., Reelle Funktionen, vol. I., Leipzig, 1932)).

Теорема VIII. Пусть множества A_n равномерно ограничены и $\{A_n\}$ сходится к A; если последовательность $\{f_n\}$ вдвойне сходится на A, то f_n псевдоравностепенно непрерывны и равномерно ограничены, начиная с некоторого значения n.

Теорема IX. Пусть нижний предел $\{A_n\}$ есть непустое множество и f_n псевдоравностепенно непрерывны. Тогда существует такая последовательность чисел $\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, что $\{A_{\lambda_n}\}$ сходится к непустому множеству A, а $\{f_{\lambda_n}\}$, каково бы ни было связное множество $B\subseteq A$, либо вдвойне сходится на B к непрерывной функции, либо вдвойне расходится на B в $+\infty$ или $-\infty$.

(В работе референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, 12, 397—410) указаны необходимые и достаточные условия компактности в смысле сходимости и равномерной сходимости к непрерывной функции подпоследовательности функций, не предполагаемых непрерывными. Такие условия получены по крайней мере для

случая, когда A_n есть постоянная прямоугольная область и функции данного семейства предполагаются суммируемыми. Эти условия выполняются, например, в случае, если функции данного семейства не превосходят по абсолютной величине одной и той же неотрицательной суммируемой функции и псевдоравностепенно непрерывны. *Реф.*)

Пусть A — область пространства S_r и $\{f_n\}$ — последовательность функций, определенных в A; x — точка S_r с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Положим $s = s_1 + s_2 + \ldots + s_r$, где $s_1, s_2, \ldots, s_r$ — неотрицательные целые числа. Пусть S_{r+s} — евклидово пространство $r+s$ измерений и z — точка S_{r+s} с координатами $x_1, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(s_1)}, \ldots, x_r, x_r^{(1)}, \ldots, x_r^{(s_r)}$. Обозначим через $A_{s_1,\ldots,s_r}$ множество точек z, удовлетворяющих следующим условиям: числа $x_i, x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(s_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ попарно не равны между собой; если ξ_i — произвольное число, заключенное между наибольшим и наименьшим из чисел $x_i, x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(s_i)}$, то точка $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ принадлежит A.

Пусть $A_{s_1,\ldots,s_r}(\tau)$ — множество точек, принадлежащих $A_{s_1,\ldots,s_r}$, для которых $|x_i^{(\lambda)} - x_i^{(\mu)}| > \tau$, $|x_i - x_i^{(\nu)}| > \tau$, где $\lambda \neq \mu$.

Обозначим через R_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ оператор, ставящий в соответствие функции f_n отношение ее приращения, соответствующего приращению переменной x_i а $x_i^{(1)} - x_i$, к приращению переменной x_i.

Обозначим через $R_1^{s_1}, \ldots, R_r^{s_r} f_n$ результат последовательного действия на функцию f_n s_1 раз оператора R_1, s_2 раз оператора R_2, $\ldots$, s_r раз оператора R_r. Этот результат обладает свойством коммутативности, причем в случае существования его предела при $x_i^{(\lambda)} \to x_i$ $(\lambda = 1, 2, \ldots; s_i; i = 1, 2, \ldots, r)$ этот предел равен

$$\partial^s f_n / \partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_r^{s_r}.$$

Теорема XII. Пусть A — прямоугольная область. Если существуют число $M > 0$ и стремящаяся к нулю последовательность чисел $\tau_n > 0$ такие, что $R_1^{s_1} \ldots R_r^{s_r} f_n | < M$ на множествах $A_{s_1,\ldots,s_r}(\tau_n)$ для $s_1 + s_2 + \ldots + s_r = s+1$, $n = 1, 2, \ldots$, то функции $R_1^{s_1} \ldots R_r^{s_r} f_n$, где $s_1 + s_2 + \ldots + s_r = s$, $n = 1, 2, \ldots$, рассматриваемые в соответствующих областях $A_{s_1,\ldots,s_r}(\tau_n)$, псевдоравностепенно непрерывны.

Теорема XIII. Пусть A — связная область и существует последовательность чисел $\tau_n > 0$, стремящаяся к нулю, такая, что функции $R_1^{s_1} \ldots R_r^{s_r} f_n$, где $s_1 + \ldots + s_r = s$, $n = 1, 2, \ldots$, рассматриваемые в соответствующих областях $A_{s_1,\ldots,s_r}(\tau_n)$, псевдоравностепенно непрерывны. Тогда существует подпоследовательность $\{f_{\lambda_n}\}$, которая либо сходится в области A к функции, имеющей непрерывные частные производные s-го порядка s, либо расходится в A, исключая самое большее некоторое множество точек, принадлежащее алгебраической гиперповерхности порядка s (по поводу компактности функций многих переменных см. также ЖМат, 1954, 5100. *Реф.*).

В работе имеется еще ряд теорем, в частности теоремы, аналогичные теоремам XII, XIII, в которых функции f_n предполагаются заданными на множествах A_n, отличных друг от друга.

Указывается на возможность применения полученных результатов к дифференциальным уравнениям в частных производных. В. М. Дубровский

5706. О дифференцируемости функций многих действительных переменных. Пеццана (Sulla differenziabilità delle funzioni di più variabili reali. Pezzana Mario), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 2, 299—309 (итал.)

Пусть $P \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. По определению, функция $f(P)$ в точке $\overline{P}$ имеет асимптотический дифференциал μ_{n-k}, если существуют такие постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что

$$\lim |P\overline{P}|^{-1} [f(P) - f(\overline{P}) - \sum_1^n \alpha_i (x_i - \overline{x}_i)] = 0,$$

когда P стремится к $\overline{P}$, оставаясь в некотором множестве $E(\overline{P})$, дополнение которого проектируется на все $(n-k)$-мерные координатные подпространства в множества плотности нуль в $\overline{P}$.

Теорема. Пусть $f(P)$ определена в n-мерном параллелепипеде R_n и непрерывна по любой группе k аргументов (k фиксировано). Если почти везде в R_n $f(P)$ имеет обычный дифференциал как функция любых k аргументов, то почти везде она имеет и μ_{n-k}. И. П. Натансон

5707. О подразделении поверхности на части со спрямляемыми границами. Фуллертон (On the subdivision of surfaces into pieces with rectifiable boundaries. Fullerton R. E.), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, **4**, № 4—5, 289—298 (англ.)

Пусть S — открытая невырожденная поверхность Фреше с конечной лебеговой мерой и с представлением $f: x = f(t)$, $x \in E^3$, $t \in Q$, Q — единичный квадрат на плоскости E^2. Доказывается, что существуют представление f_0 поверхности S, эквивалентное f в смысле Фреше, и последовательность вложенных друг в друга подразделений P_k $(k = 1, 2, \ldots)$ квадрата Q на прямоугольники $R_{ik} \in P_k$ $(i = 1, 2, \ldots)$, попарно не имеющие общих внутренних точек, со сторонами, параллельными осям координат, со свойствами: 1) отношение большей стороны к меньшей для каждого R_{ik} не больше числа 2; 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует число n_ε такое, что диаметр каждого R_{ik} меньше ε для $k > n_\varepsilon$; 3) для каждого R_{ik} его граница в Q отображается при f_0 в спрямляемую кривую. Л. Д. Кудрявцев

5708. О структуре множеств уровня действительных функций двух переменных. Часар (Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à deux variables. Császár Ákos), Acta scient. math., 1954, **15**, № 3—4, 183—202 (франц.)

Производится классификация точек плоскости в зависимости от характера поведения функции двух переменных в парах углов, исходящих из этих точек, и устанавливается ряд теорем, указывающих, какие из типов точек являются, в известном смысле, исключительными.

Вводятся обозначения: $S(z_0, r, \alpha, \beta)$ — совокупность точек z плоскости вида $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, где $0 < \rho < r$ и $\alpha < \varphi < \beta$; $\mathfrak{N}$ — фиксированный класс таких множеств плоскости, что если $A \in \mathfrak{N}$, а $B \subset A$, то $B \in \mathfrak{N}$, и если $A_i \in \mathfrak{N}$, то $\bigcup A_i \in \mathfrak{N}$ (примером класса $\mathfrak{N}$ может служить совокупность множеств нулевой плоской или линейной меры, первой категории и т. д.); $\mathfrak{H}$ — класс

множеств, допускающих счетные покрытия спрямляемыми кривыми и, наконец, $\mathfrak{N}^*$ — класс множеств вида $N \cup H$, где $N \in \mathfrak{N}$, а $H \in \mathfrak{H}$. По определению, функция $f(z)$ обладает в точке z_0 свойством $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$, если для некоторого $r > 0$

$$E[z : f(z) \leqslant f(z_0),\ z \in S(z_0,\ r,\ \alpha,\ \beta)] \in \mathfrak{N};$$

$f(z)$ обладает в z_0 свойством $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$, если для некоторого $r > 0$

$$E[z : f(z) < f(z_0),\ z \in S(z_0,\ r,\ \alpha,\ \beta)] \in \mathfrak{N}$$

и при любом $r > 0$

$$E[z : f(z) \leqslant f(z_0),\ z \in S(z_0,\ r,\ \alpha,\ \beta)] \notin \mathfrak{N}.$$

Если в приведенных определениях изменить знаки неравенств на противоположные, то получим определения свойств $D_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ и $D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$. Функция $f(z)$ обладает в z_0 свойством $O_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$, если при любом $r > 0$

$$E[z : f(z) \leqq f(z_0),\ z \in S(z_0,\ r,\ \alpha,\ \beta)] \notin \mathfrak{N}.$$

Доказываются теоремы:

1. Если в каждой точке $z_0 \in E$ функция $f(z)$ обладает свойством $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ (или $D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$) и одновременно одним из свойств $C_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$, $D_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ или $O_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$, то $E \in \mathfrak{N}^*$ (здесь, и далее, числа α, β и γ, δ зависят, вообще говоря, от z_0).

2. Если в каждой точке $z_0 \in E$ функция $f(z)$ обладает свойствами $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ и $D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$, то $E = N \cup L$, где $N \in \mathfrak{N}^*$, а L можно покрыть счетной системой кругов, в каждом из которых $f(z)$ постоянна, исключая, быть может, множество из класса $\mathfrak{N}$.

3. Если в каждой точке множества E функция $f(z)$ обладает одновременно свойствами $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ и $C_{\alpha+\pi,\ \beta+\pi}(\mathfrak{N})$, то $E \in \mathfrak{N}^*$.

В работе также доказываются аналогичные теоремы метрического характера. А. Я. Дубовицкий

5709. **Исследование одного выражения, связанного с преобразованием пар функций двух переменных. Гульельмино** (Studio di una espressione legata ad una trasformazione di coppie di funzioni di due variabili. Guglielmino Francesco), Boll. Accad. Gioenia sci. nat. Catania, 1953, 2, 221—231 (итал.)

5710. **Характеристики верхних и нижних интегралов, основанные на аддитивности и теореме о среднем. Криккеберг** (Charakterisierung oberer und unterer Integrale durch Additivitäts- und Mittelwerteigenschaften. Krickeberg Klaus), Math. Z., 1955, 61, № 4, 374—385 (нем.)

Автор пользуется определениями и обозначениями своей предыдущей работы (РЖМат, 1953, 146).

Пусть $\mathfrak{S}$ — борелевское кольцо с наибольшим множеством E и $\mathfrak{N}$ — борелевский идеал в $\mathfrak{S}$ (т. е. такое борелевское подкольцо, что из $N \in \mathfrak{N}$, $M \in \mathfrak{S}$, $M \subset N$ следует $M \in \mathfrak{N}$). Если ν — мера в $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{N}_\nu$ есть система всех $M \in \mathfrak{S}$ с $\nu(M) = 0$. Доказывается, что следующие два предложения эквивалентны.

I. Для всякой меры ν в $\mathfrak{S}$ такой, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}_\nu$, и каждой действительной функции f на E из существования наибольшей среди вполне аддитивных функций φ множества $M \in \mathfrak{S}$, удовлетворяющих неравенству $\varphi(M) \leqslant \nu(M) \sup_M f$, вытекает существование $\int_E f d\nu$.

II. Для каждого борелевского идеала $\mathfrak{J}$ в $\mathfrak{S}$ такого, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{J}$, и каждого $K \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{J}$ существует конечная мера λ в $\mathfrak{S}$ такая, что $\lambda(I) = 0$ при $I \in \mathfrak{J}$ и $\lambda(K) > 0$.

Рассматривается еще ряд смежных вопросов и примеров. П. И. Романовский

5711. **Приближения Φ-интегралов суммами Римана и Дарбу и другие вопросы теории Φ-интегралов в общих пространствах. Мур** (Approximations of Φ-integrals by Riemann and Darboux sums, and other contributions to the theory of Φ-integrals in general spaces. Moore Marian A.), Riv. mat. Univ. Parma, 1954, 5, № 1—3, 99—123 (англ.)

Рассмотрения автора тесно связаны с содержанием книги Хана и Розентала (Hahn H., Rosenthal A., Set functions, Albuquerque, Univ. New Mexico Press, 1948).

Пусть Φ — вполне аддитивная функция в σ-поле $\mathfrak{M}$ подмножеств общего пространства E. Для Φ-измеримых функций f на $A \in \mathfrak{M}$ интеграл $(A)\int f d\Phi$ определяется как $\lambda(A)$, где $\lambda(M)$ — такая вполне аддитивная функция от $M \subseteq A$, $M \in \mathfrak{M}$, что если $C \leqslant f(x) \leqslant C'$ на M, то

$$C\,\Phi(M) \leqslant \lambda(M) \leqslant C'\,\Phi(M) \text{ при } \Phi^-(M) = 0,$$
$$C'\,\Phi(M) \leqslant \lambda(M) \leqslant C\,\Phi(M) \text{ при } \Phi^+(M) = 0.$$

В гл. 1 изучаются приближения несобственных Φ-интегралов (когда $A = \sum_1^\infty A_i$, A_i — Φ-измеримы, не пересекаются, $\Phi(A_i)$ конечны) суммами Римана и Дарбу. В гл. 2 изучается вопрос о $\lim(B_i)\int f d\Phi$ (где $\lim B_i = A$). В гл. 3 рассматриваются теоремы о среднем и обычные неравенства. В гл. 4 излагаются теоремы сходимости. П. И. Романовский

5712. **Заметки об интегрировании. III. Теорема Фубини. Эномото** (Notes sur l'intégration. III. Théorème de Fubini. Enomoto Shizu), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 6, 437—442 (франц.)

Развивая идеи частей I и II (РЖМат, 1955, 4951, 4952), автор называет функцию $f(x, y)$, определенную на интервале $R \subset E_2$, $\mathfrak{D}$-интегрируемой, если существуют конечно-аддитивная функция интервала $F(I)$, $I \subset R$, и последовательность замкнутых множеств F_n, обладающие свойствами: 1) $f(x, y)$ суммируема на F_n; 2) $\sum_1^\infty F_n = R$; 3) найдутся такие $\delta(n, \varepsilon) > 0$, что из 3.1) $I_i \cap F_n \neq 0$ для всех i; 3.2) $\mu(\Sigma_i I_i \setminus F_n) < \delta(n, \varepsilon)$; 3.3) $n(I_i) \leqslant 1/n$ для всех i (где $\{I_i\}$ — система интервалов на R) — следует

$$\left| \sum_i F(I_i) - \sum_i (L) \iint_{I_i \cap F_n} f(x, y)\, dx\, dy \right| < \varepsilon.$$

Автор отмечает, что для $\mathfrak{D}$-интегралов справедлива теорема Фубини. П. И. Романовский

5713. **Интеграл Перрона — Стилтьеса. Николеску** (Integrale Perron—Stieltjès. Nicolescu Lilly), Comun. Acad. R. P. Romine, 1954, 4, № 11—12, 555—559 (рум.; резюме русс., франц.)

Рассматривается видоизменение данного Риддеров определения интеграла Перрона — Стилтьеса. Из определения автора просто выводится формула интегрирования по частям для этого интеграла.

П. И. Романовский

5714. **Об интегральных теоремах Гаусса и Стокса. III. Криккеберг** (Über den Gaußschen und den Stokesschen Integralsatz. III. Krickeberg Klaus), Math. Nachr., 1954, 12, № 5—6, 341—360 (нем.)

Дается подробный обзор различных доказательств интегральных теорем Гаусса — Остроградского и Стокса (кроме чисто формальных и геометрически или физически наглядных, но не строгих). В § 1 анализируют

ся непосредственные доказательства теоремы Гаусса — Остроградского, основанные на применении теоремы Фубини к самой области интегрирования или к областям, ее аппроксимирующим. В § 2 рассматриваются дальнейшие доказательства теоремы Гаусса — Остроградского. В § 3 рассматриваются доказательства теоремы Стокса, основанные на принципе отображения поверхности интегрирования. В § 4 говорится о других доказательствах теоремы Стокса, в частности о доказательствах, основанных на аппроксимации поверхности интегрирования более простыми поверхностями.

Список литературы доведен до 1954 г.

Части I, II см. РЖМат, 1954, 5501; 1955, 152.

П. И. Романовский

5715. О сходимости сингулярных интегралов. Тандори (Über die Konvergenz singulärer Integrale. Tandori Károly), Acta scient. math., 1954, **15**, № 3—4, 223—230 (нем.)

Устанавливаются необходимые и достаточные условия представимости функций класса L_p сингулярным интегралом в p-кратных точках Лебега, т. е. в точках x, где

$$\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|^p \, dt = o(h).$$

Задача сводится к вычислению нормы функционала в специальном банаховом пространстве.

Полученные условия отличаются от необходимых и достаточных условий, приведенных в работе Б. И. Коренблюма, референта и Б. Я. Левина (Докл. АН СССР, 1948, **62**, № 1, 17—20), тем, что вместо точной нормы соответствующего функционала, выраженной через наибольшую выпуклую миноранту ядра сингулярного интеграла, в них фигурирует эквивалентная ей норма в виде суммы некоторого ряда.

Автору, повидимому, неизвестно, что для случая простых точек Лебега функций из L_p в аналогичной форме условия были даны Б. И. Коренблюмом (Докл. АН СССР, 1947, 58, № 6, 973—976).

В качестве следствия из полученных условий автор выводит теорему Д. К. Фаддеева (Матем. сб., 1936, **1 (43)**, 351—368).

С. Г. Крейн

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

5716. К теории фильтров. II. Шмидт (Beiträge zur Filtertheorie. II. Schmidt Jürgen), Math. Nachr., 1953, **10**, № 3—4, 197—232 (нем.)

В первой главе излагаются известные результаты теории бинарных отношений и соответствий Галуа, используемые во второй главе.

Множества M_1 и M_2 из системы подмножеств $\mathfrak{E}$ основного множества E называются сцепленными, $M_1 * M_2$, если $M_1 \cap M_2 \neq 0$. Множество Y называется сцепленным с системой множеств $\mathfrak{M}$, $Y * \mathfrak{M}$, если Y сцеплено с каждым множеством M из $\mathfrak{M}$. Система $\mathfrak{M}^*$ всех множеств Y, сцепленных с системой $\mathfrak{M}$, называется сцеплением $\mathfrak{M}$. Отображение $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^*$ называется оператором сцепления. Система $\mathfrak{M}$ называется возрастающей, если из $A \in \mathfrak{M}$ и $A \subseteq B$ следует $B \in \mathfrak{M}$. Через $\overline{A}$ обозначается дополнение множества A: $\overline{A} = E \setminus A$, а через $\overline{\mathfrak{M}}$ — дополнение системы $\mathfrak{M}$: $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{E} \setminus \mathfrak{M}$. Для того чтобы система множеств $\mathfrak{M}$ была возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы из $\overline{A} \in \overline{\mathfrak{M}}$ следовало $A * \mathfrak{M}$. Областью значений оператора сцепления $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^*$ является множество всех возрастающих систем множеств. Отображение $\mathfrak{M} \to \overline{\mathfrak{M}}$ называется оператором дополнения системы. Отображение $\mathfrak{M} \to \underline{\mathfrak{M}}$, где $\underline{\mathfrak{M}}$ состоит из всех множеств Y, дополнения которых $\overline{Y}$ принадлежат $\mathfrak{M}$, называется оператором дополнения множеств Система множеств $\mathfrak{F}$ называется фильтром, если $\mathfrak{F}$ — возрастающая система и пересечение произвольной конечной подсистемы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Система множеств $\mathfrak{J}$ называется идеалом, если вместе с множеством J каждое подмножество $J' \subseteq J$ принадлежит $\mathfrak{J}$ и объединение произвольной конечной подсистемы из $\mathfrak{J}$ принадлежит $\mathfrak{J}$. Система множеств $\mathfrak{R}$ называется растром, если $\mathfrak{R}$ — возрастающая система, и из того, что объединение произвольной конечной системы множеств T принадлежит $\mathfrak{R}$, следует, что по крайней мере одно из множеств T принадлежит $\mathfrak{R}$. Оператор дополнения множеств взаимно однозначно отображает множество всех идеалов на множество всех фильтров; обратным является оператор дополнения множеств, определенный на множестве всех фильтров. Оператор дополнения системы взаимно однозначно отображает множество всех идеалов на множество всех растров; обратным является оператор дополнения системы, определенный на множестве всех растров. Оператор сцепления взаимно однозначно отображает множество всех фильтров на множество всех растров; обратным является оператор сцепления, определенный на множестве всех растров.

Система (M, E) всех множеств, содержащих множество M, называется главным фильтром. Система всех множеств, сцепленных с главным фильтром, называется главным растром. Главный растр есть возрастающая система, не представимая в виде пересечения других возрастающих систем множеств.

Приводятся условия, при которых два фильтра, а также множество и фильтр сцеплены.

Ультрафильтрами называются «неподвижные точки» оператора сцепления, рассматриваемого на множестве всех фильтров. Каждый фильтр сравним со своим сцеплением. Собственными называются те фильтры, которые содержатся в своем сцеплении; несобственный фильтр, состоящий из всех множеств $\mathfrak{E}$, является единственным, сцепление которого (пустое множество) содержится в нем в качестве собственной подсистемы. Ультрафильтрами являются все те фильтры, которые совпадают со своим сцеплением. Ультрафильтры есть все те системы множеств, которые одновременно являются фильтрами и растрами. Ультрафильтрами являются все те растры, которые не содержат других растров, кроме себя и пустого растра. Каждый растр равен объединению всех содержащихся в нем ультрафильтров. Сцепление фильтра $\mathfrak{F}$ равно объединению всех содержащих $\mathfrak{F}$ ультрафильтров. Сцепление растра $\mathfrak{R}$ равно пересечению всех содержащихся в $\mathfrak{R}$ ультрафильтров.

В заключение устанавливаются связи между топологически замкнутыми множествами ультрафильтров, фильтров и растров и замкнутыми и открытыми относительно некоторых соответствий Галуа множествами.

А. Х. Лившиц

5717. О конструкции вполне упорядоченных множеств. Банашевский (Über die Konstruktion wohlgeordneter Mengen. Banaschewski Bernhard), Math. Nachr., 1953, **10**, № 3—4, 239—245 (нем.)

Пусть φ — отображение системы $\mathfrak{P}E$ частей множества E в себя такое, что образ φA любого $A \subseteq E$ не более, чем одноэлементный. Часть U множества E называется φ-вполне упорядоченной (φ-Wohlordnung), если U — вполне упорядоченное множество такого рода, что для $x \in U$ имеет место отношение $x = \varphi U_x$, где U_x — отрезок множества U, отсекаемый x.

Пусть система всех вполне упорядоченных частей множества E упорядочена отношением «A есть начало B», символически: $A \trianglelefteq B$. Доказывается, что

при этом система φ-вполне упорядоченных множеств содержит наибольшее φ-вполне упорядоченное множество W, которое является объединением всех φ-вполне упорядоченных множеств. W есть единственное начало A из W, для которого $\varphi A = \phi$ или $\varphi A \in A$. Если $W_x^* = W_x \cup \{x\}$, то W тогда и только тогда имеет $m \in M$ своим последним элементом, когда $\varphi W_m^* = \phi$ или $\varphi W_m^* \in W_m^*$.

Отображение φ удовлетворяет условию конфинальности, если для любого множества $A \subseteq E$, являющегося конфинальной частью некоторого φ-вполне упорядоченного множества U, имеет место $\varphi A = \varphi U$.

Множество $M \subseteq E$ называется φ-множеством, если для любого $A \subseteq M$ имеет место $\varphi A \subseteq M$.

Пусть D есть пересечение всех φ-множеств множества E; оно само есть φ-множество. Доказывается, что $W \subseteq D$, причем $W = D$, если φ удовлетворяет условию конфинальности.

В последнем разделе автор рассматривает описанные выше результаты с точки зрения «систем замыканий» (Hullensysteme) (Schmidt J., Math. Nachr., 1952, 7, 165—182) и устанавливает некоторое обращение результатов. З. И. Козлова

5718. **Отображения Пеано и проблема Суслина.** К у р е п а (Peanova preslikavanja i Suslinov problem. K u r e p a S v e t o z a r), Glasn. mat.-fiz. i astron., 1953, 8, № 3, 175—190 (хорв.; резюме англ.)

Свойство Суслина (S) пространства состоит в том, что всякое семейство попарно непересекающихся окрестностей не более чем счетно. Свойство (D) упорядоченного множества E состоит в том, что существует монотонное отображение E в себя со всюду плотным в E множеством точек разрыва.

Из доказанных в работе теорем важнейшими являются следующие.

Пусть E — непрерывно упорядоченное пространство с первым и последним элементом и свойством (S). Тогда, для того чтобы E^2 обладало свойством (S), необходимо и достаточно, чтобы существовало пеаново отображение E на E^2.

Пусть E — непрерывно упорядоченное множество со свойством (S) без первого и последнего элементов. Для того чтобы E было подобно множеству действительных чисел (0,1), необходимо и достаточно, чтобы E обладало свойством (D).

Приводится пример множества, обладающего свойством (D), но не обладающего свойством (S). Ставится проблема о существовании упорядоченного множества со свойством (S), но без свойства (D).

А. С. Есенин-Вольпин

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

5719. **Теоремы единственности для одного класса обобщенных тригонометрических рядов.** С м е р л (Uniqueness theorems for a class of generalized trigonometrical series. S m y r l J. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 971—978 (англ.)

Излагаются некоторые результаты докторской диссертации автора.

Рассматриваются ряды вида

$$a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos \mu_n x + b_n \sin \mu_n x), \qquad (1)$$

где $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ — неотрицательные корни уравнения

$$Z + h \operatorname{tg} \pi Z = 0 \quad (h > 0).$$

Если коэффициенты ряда (1) связаны с некоторой функцией $f(x)$ (заданной на $(-\pi, \pi)$) соотношениями

$$a_0 = K_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt,$$

$$a_n + ib_n = K_n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{i\mu_n t}\, dt$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

где

$$K_0 = \frac{h}{2(1 + \pi h)},$$

$$K_n = \frac{2\mu_n}{2\pi\mu_n - \sin 2\pi\mu_n},$$

то ряд (1) является обобщенным рядом Фурье для функции $f(x)$ (автор применяет краткое обозначение: ряд F. A. для функции $f(x)$). Модифицированным рядом F. A. (кратко: рядом M. F. A.) для функции $g(x)$ называется ряд

$$\sum_1^\infty (a_n \cos \mu_n x + b_n \sin \mu_n x) = \sum_1^\infty A_n(x) \quad (2)$$

в случае, когда ряд (1) является рядом F. A. для функции $f(x) = g(x) + a_0$ (где a_0 — некоторая постоянная). Обозначим через $P(r, x)$ сумму ряда

$$\sum_1^\infty A_n(x)\, r^n \quad (0 < r < 1)$$

и через $P^*(x)$ и $P_*(x)$ верхний и нижний пределы $P(r, x)$ при $r \to 1$.

Доказываются следующие теоремы:

1. Если ряд (2) сходится на $(-\pi, \pi)$ везде, кроме, быть может, счетного множества точек, к функции $f(x) \in L(-\pi, \pi)$, то он является рядом M. F. A. для функции $f(x)$.

2. Если $a_n = o(n)$, $b_n = o(n)$ и $P^*(x)$, $P_*(x)$, конечны при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ и интегрируемы, то ряд (2) является суммой некоторого ряда M. F. A. и ряда $k\sum_1^\infty K_n \sin \mu_n \pi \sin \mu_n x$, где k — некоторая постоянная.

3. Если, кроме условий предыдущей теоремы, выполняются почти всюду равенства $P^*(x) = P_*(x) = 0$, то $a_n = b_n = 0$ для всех n.

Автор указывает (отсылая за доказательством к своей диссертации), что в условиях теоремы 2 можно допустить счетное множество точек, в которых вместо конечности $P^*(x)$ и $P_*(x)$ предположить выполнение соотношения

$$P(r, x) = o[(1 - r)^{-1}] \quad (r \to 1).$$

Для доказательства этих теорем используются формулы Верблюнского (Verblunsky S., Bull. sci. math., 1952, 76, 85—96), выражающие частные суммы ряда F. A. для функции $f(x)$ через частные суммы ряда Фурье некоторой вспомогательной функции, связанной с функцией $f(x)$. А. А. Шнейдер

5720. **Об интегрируемости функций, определенных тригонометрическими рядами.** Х е й в у д (On the integrability of functions defined by trigonometric series. H e y w o o d P.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 17, 71—76 (англ.)

оложим:

$$f(x) \sim \lambda_0/2 + \sum_1^\infty \lambda_n \cos nx,$$

$$g(x) \sim \sum_1^\infty \lambda_n \sin nx.$$

оказываются теоремы:

1. Пусть $\lambda_n > \lambda_{n+1} \to 0$. Для того чтобы $n^{-\gamma} g(x) \in L(0, \pi)$, $1 < \gamma < 2$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_1^\infty n^{\gamma-1} \lambda_n < \infty$.

2. Пусть λ_n неотрицательны (начиная с некоторого n) $\lambda_0/2 + \sum_1^\infty \lambda_n = 0$. Для того чтобы $x^{-\gamma} f(x) \in L(0, \pi)$, $1 < \gamma < 3$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_1^\infty n^{\gamma-1} \lambda_n < \infty$. Указанные теоремы дополняют результаты Боаса (Boas R. P., Quart. J. Math., 1952, 3, 217—221). И. Е. Жак

5721. **О тригонометрических рядах с коэффициентами, имеющими случайные знаки. Салем, Зигмунд** (Sur les séries trigonométriques dont les coefficients ont des signes aléatoires. Salem Raphael, Zygmund Antoni), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 6, 571—573 (франц.)

Формулируются результаты, доказанные в другой статье авторов (РЖМат, 1955, 4960).

5722. **Чезаровское суммирование рядов Фурье.** Суноути (Cesàro summability of Fourier series. Sunouchi Gen-ichirô), 東北數學雜誌 (Tohoku sugaku dsasci, Tôhoku Math. J.), 1953, 5, № 2, 198—210 (англ.)

Пусть

$$\varphi(t) \sim \sum_1^\infty a_n \cos nt \qquad (1)$$

s_n^β — (C, β)-средние ряда (1).

оложим

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \varphi(u)(t-u)^{\alpha-1} du \quad (\alpha > 0).$$

Доказываются теоремы:

1. Если $0 < \beta < \gamma$ и $\Phi_\beta(t) = o(t^\gamma)$ $(t \to 0)$, то ряд (1) $C, \beta/(\gamma-\beta-1))$-суммируем к 0 в точке $t = 0$.

2. Если $s_n^\beta = o(n^\gamma)$ $(n \to \infty)$, $\beta > \gamma > -1$, $1 + \gamma > \delta$ $\sum_n^\infty |a_\nu|/\nu = O(n^{-(1-\delta)})$, $0 < \delta < 1$, то $\Phi^\alpha(t) = o(t^\alpha)$ $t \to 0)$, где $\alpha = \delta(\beta+1)/(\beta-\gamma+\delta)$.

И. Е. Жак

5723. **О функциях из Lip α. Плесси** (A note about functions in Lip α. Plessis N. du), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1954, 10, № 2, 100 (англ.)

Доказывается, что периодические функции класса Lip α $(0 < \alpha < 1)$ характеризуются условием $\sigma_n - \sigma_m = O(n^{-\alpha})$ (равномерно на $[0, 2\pi]$), где σ_n — средние Фейера. Это результат С. Н. Бернштейна (Собр. соч., 1952, 89). И. Г. Соколов

5724. **О законе повторного логарифма. I, II. Эрдёш, Гал** (On the law of the iterated logarithm. I, II. Erdös P., Gál I. S.), Proc. Kouinkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 1, 65—84; Indagationes math., 1955, 17, № 1, 65—84 (англ.)

Целью статьи является доказательство следующей теоремы. Пусть $n_1 < n_2 < \ldots < n_\nu < \ldots$ — бесконечная последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию лакунарности $n_{\nu+1}/n_\nu > q > 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Тогда для почти всех x

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\left|\sum_1^N \exp 2\pi i n_\nu x\right|}{\sqrt{N \log\log N}} = 1.$$

Этот результат не является неожиданным ввиду закона повторного логарифма для суммы независимых функций и хорошо известного сходства последовательности $\{\exp 2\pi i n_\nu x\}$, $n_{\nu+1}/n_\nu > q > 1$, с последовательностью независимых функций. Тем не менее, доказательство вышеприведенного результата представляет значительные трудности. Из предисловия авторов.

5725. **Суммирование двойного тригонометрического ряда методом Лебега. Тевзадзе** (ორმაგი ტრიგონომეტრიული მწკრივის შეჯამებადობა ლებეგის მეთოდით. თევზაძე ნ.), თბილისის უნ-ტის შრომები (Тр. Тбилис. ун-та), 1953, 50, 1—12 (груз.; резюме русс.)

Ряд

$$\sum_{m,n=0}^\infty \lambda_{m,n} A_{m,n}(x, y), \qquad (1)$$

где $\lambda_{m,n} = 1$ при $mn > 0$, $\lambda_{m,0} = \lambda_{0,n} = 1/2$ при $m, n \geqslant 1$, $\lambda_{0,0} = 1/4$, $A_{m,n}(x, y) = a_{m,n}\cos mx \cos ny + b_{m,n} \sin mx \cos ny + c_{m,n} \cos mx \sin ny + d_{m,n} \sin mx \sin ny$,

называется L-суммируемым (суммируемым методом Лебега) в точке (x_0, y_0) к значению S, если

$$\lim_{u,v\to 0} \sum_{m,n=0}^\infty \lambda_{m,n} A_{m,n}(x, y) \frac{\sin mu}{mu} \frac{\sin nv}{nv} = S.$$

Положим

$$A_{m,n} = \max\{|a_{m,n}|, |b_{m,n}|, |c_{m,n}|, |d_{m,n}|\}.$$

Ряд (1) называется рядом класса A, если выполняются условия:

$$\sum_{m=0}^\infty A_{m,n} = o(1/n), \quad n \to \infty;$$

$$\sum_{n=0}^\infty A_{m,n} = o(1/m), \quad m \to \infty.$$

Доказываются теоремы:

1. Если ряд (1) является рядом класса A, то для сходимости его в точке (x_0, y_0) к сумме S необходимо и достаточно, чтобы он был L-суммируем к значению S.

2. Если ряд (1) класса A есть ряд Фурье функции $f(x, y)$, непрерывной на некотором прямоугольнике $[a, b; c, d]$, то он равномерно сходится на этом прямоугольнике. И. Е. Жак

5726. **О наилучших приближениях рациональными функциями. Гончар А. А.**, Докл. АН СССР, 1955, 100, № 2, 205—208

Рассматриваются наилучшие приближения $R_n(f)$ функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$, рациональными дробями, у которых степени числителя и знаменателя не выше n. Доказывается, что никакая скорость убывания $R_n(f)$ не обеспечивает сколько-нибудь хороших

структурных свойств $f(x)$. Именно, каковы бы ни были $\varphi(n) \downarrow 0$ и $\omega(\delta) \downarrow 0$, существует непрерывная $f(x)$, для которой

$$R_n(f) < \varphi(n), \quad \overline{\lim_{\delta \to 0}} \, \omega_f(\delta) / \omega(\delta) > 1.$$

Тем не менее неравенство $R_n(f) \leqslant \overline{n}^{(1+\varepsilon)}$ $(\varepsilon > 0)$ обеспечивает дифференцируемость $f(x)$ почти везде, а неравенство $R_n(f) \leqslant n^{-(p+\varepsilon)}$ $(\varepsilon > 0)$ обеспечивает наличие у $f(x)$ почти везде p-й асимптотической производной.

Существуют функции, не аналитические ни на какой части отрезка $[0, 1]$, для которых $R_n(f)$ убывает сколь угодно быстро. В то же время, если $R_n(f) < Cq^n$ $(36q < 1)$ и $f(x) = 0$ на произвольном множестве $\Delta \subset [0,1]$ с $m\Delta > 0$, то $f(x) \equiv 0$.

Доказательства лишь намечены. И. П. Натансон

5727. О наилучшем приближении непрерывных функций линейными комбинациями данных функций. Зингер (Despre cea mai bună aproximare a funcţiilor continue prin combinaţii liniare de funcţii date. Singer Ivan), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1954, 6, № 3, 465—475 (рум.; резюме русс., франц.)

Если функции $f(x)$ и $g(x)$, непрерывные на $[a, b]$, приближать «обобщенными полиномами» $P_n = a_0\varphi_0 + \ldots + a_n\varphi_n$, где $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$ образуют систему Чебышева на $[a, b]$, а φ_{n+1} играет вспомогательную роль, то (при очевидных ограничениях) доказывается:

1. Если для любых точек $x_1, \ldots, x_{n+2} \in [a, b]$ $|\{x_1, \ldots, x_{n+2}; f\}| < |\{x_1, \ldots, x_{n+2}; g\}|$, то $E_n(f) < E_n(g)$, где $\{x_1, \ldots, x_{n+2}; f\}$ — обобщенная разделенная разность функции $f(x)$, E_n — наилучшее равномерное приближение.

2. Если $|W(\varphi_0, \ldots, \varphi_n; f)| < |W(\varphi_0, \ldots, \varphi_n; g)|$, где W — вронскиан, то: а) $E_n(f) < E_n(g)$; б) для любой фиксированной системы $x_1, \ldots, x_{n+1}$ и любого $x \in [a, b]$ $|R_n(f)| < |R_n(g)|$, где R_n — остаточный член при интерполировании в точках $x_1, \ldots, x_{n+1}$; в) $E_n^{(s)}(f) < E_n^{(s)}(g)$, где $E_n^{(s)}$ — наилучшее приближение в метрике $L^s(a, b)$.

В случае $\varphi_k(x) = x^k$ $(k = 0, \ldots, n+1)$ утверждения 1 и 2а) суть соответственно теоремы Д. А. Райкова (Докл. АН СССР, 1939, 24, № 7, 653—656) и С. Н. Бернштейна (Экстремальные свойства полиномов, М.—Л., 1937, 46—48), утверждения 2б), в) — теоремы референта (Матем. сб., 1947, 21 (63), 435—438; 1951, 28 (70), 473—478). И. В. Ценов

5728. О сходимости интерполяционного процесса Эрмита — Фейера. Фрёйд (Über die Konvergenz des Hermite — Fejérschen Interpolationsverfahrens. Freud Géza), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, 5, № 1—2, 109—128 (нем.; резюме русс.)

Пусть $p(x)$ — заданная на $[-1, 1]$ неотрицательная весовая функция и $\{\omega_n(x)\}$ — соответствующая последовательность ортонормированных полиномов. Рассматривается интерполяционный процесс Фейера — Эрмита с узлами в нулях x_{kn} $(k = 1, \ldots, n)$ полинома $\omega_n(x)$:

$$H_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_{kn}) v_{kn}(x) + d_{kn}(x - x_{kn})] l_{kn}^2(x),$$

где

$$v_{kn}(x) = 1 - \omega_n''(x_{kn})(x - x_{kn}) / \omega_n'(x_{kn}),$$

$$l_{kn}(x) = \omega_n(x) / [\omega_n'(x_{kn})(x - x_{kn})],$$

$d_{kn} = H'_{2n-1}(x_{kn})$ — произвольно заданная последовательность чисел. Согласно Фейеру матрица, образованная узлами интерполяции, нормальна, если для всех x $v_{kn}(x) \geqslant 0$, и ρ-нормальна, если $v_{kn}(x) \geqslant \rho > 0$. В частности, Фейер (Fejér L., Math. Ann., 1934, 106, 1—55) показал, что в случае полиномов Якоби $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ матрица нормальна, если $\alpha \leqslant 0$, $\beta \leqslant 0$, ρ-нормальна при $\alpha < 0$, $\beta < 0$, где $\rho = \min\{-\alpha, -\beta\}$. Грюнвальд (Grünwald G., Acta math., 1943, 75, 219—245) показал, что если матрица нормальна и числа d_{kn} ограничены, то $H_{2n-1}(x) \to f(x)$ равномерно во всяком промежутке внутреннем к $[-1, 1]$ ($f(x)$ непрерывна на $[-1,1]$). Сходимость равномерна на всем промежутке $[-1,1]$, если матрица ρ-нормальна и $|d_{kn}| < An^{\rho-\varepsilon}$.

Автором накладываются условия непосредственно на весовую функцию.

Пусть полиномы $\omega_n(x)$ ограничены в некотором промежутке $[\alpha, \beta]$ и

$$d_{kn} = \begin{cases} o(n / \ln n), & \text{если } \alpha \leqslant x_{kn} \leqslant \beta, \\ o[\min\{n / \sqrt{1 - x_{kn}^2}, n^2\}] & \text{для всех } x_{kn}. \end{cases}$$

1. Если $p(x)$ — положительная и непрерывная на $[-1,1]$ функция, удовлетворяющая в интервале (α, β) условию Дини — Липшица, и $f(x)$ непрерывна в точках $-1, 1$, то $H_{2n-1}(x) \to f(x)$ во всякой точке непрерывности $f(x)$ интервала (α, β). Если $f(x)$ непрерывна в (α, β), то сходимость равномерна во всяком внутреннем подинтервале интервала (α, β).

2. Пусть $0 < m \leqslant p(x) \leqslant M$. Если $f(x)$ непрерывна в $[-1,1]$ и удовлетворяет условию Дини — Липшица равномерно в интервале (α, β), то $H_{2n-1}(x) \to f(x)$ равномерно во всяком подинтервале интервала (α, β).

И. Г. Соколов

5729. Представление некоторых определенных интегралов с помощью определителей. Ч. 2. Шентон (A determinantal expansion for a class of definite integral. Part 2. Shenton L. E.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1954, 10, № 2, 78—90 (англ.)

Пусть $p(x)$ — вес, $\omega_k(x)$ — соответствующие ортонормальные многочлены. Доказывается справедливость формулы Парсеваля для всякой функции, интегрируемой с квадратом при весе $p(x)$, если

1) $p(x) = e^{-x} x^\alpha C(x)$ $(\alpha > -1, 0 \leqslant x < +\infty)$,

2) $p(x) = e^{-x^2} C(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$,

причем $C(x)$ есть любой многочлен, положительный в области интегрирования, или (что тривиально поскольку для $C(x) \equiv 1$ результаты известны) неотрицательная ограниченная измеримая функция.

Полученные результаты используются для разложения интегралов в ряды так же, как для случая конечного промежутка это было сделано в 1-й части (РЖМат, 1954, 4398). Приводятся примеры.

И. П. Натансон

5730 К. Почти-периодические функции. Левитан Б. М., М., Гостехиздат, 1953, 396 стр., 10 р. 75 к.

Излагаются как классические результаты теории равномерных почти периодических (ПП) функций, так и обобщения этой теории (N-ПП функции, теория которых в основном принадлежит автору, ПП функции в других метриках, ПП функции на группе, аналитические ПП функции). По широте охвата материала книга превосходит другие руководства в этой области.

В гл. 1 части I изложены основные факты теории равномерных ПП функций: эквивалентность определений Бора и Бохнера почти периодичности, построение ряда Фурье, доказательства равенства Парсеваля (при помощи метода Вейля) и теоремы аппроксимации (при помощи методов Винера и Бохнера — Фейера). Здесь же излагается построение теории ПП функций, принадлежащее Н. Н. Боголюбову и относящееся к 1930—1931 гг. Центральное место в гл. 2 занимают теоремы Бора о связи показателей Фурье с почти периодами и о совпадении класса ПП функций с классом диагональных значений предельно периодических функций от не более чем счетного числа переменных. В этой же главе изложена теорема Бора об аргументе ПП функции.

В гл. 3 излагается теория N-ПП функций, введенных автором и изучавшихся также Б. Я. Левиным и В. А. Марченко. N-ПП функция может быть определена следующим образом: число $\tau = \tau(\varepsilon, N)$ называется ε, N-почти периодом функции $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, если для всех x, $|x| < N$, выполняется неравенство $|f(x \pm \tau) - f(x)| < \varepsilon$. Непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ называется N-ПП, если существуют зависящие только от $f(x)$ числа $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ такие, что для любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ можно найти такие $\delta > 0$ и n, что каждое число τ, удовлетворяющее системе неравенств $|\Lambda_k \tau| < \delta \pmod{2\pi}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, является ε, N-почти периодом функции $f(x)$. Из теоремы Бора о связи показателей Фурье равномерной ПП функции с ее почти периодами вытекает, что каждая равномерная ПП функция является N-ПП, однако обратное неверно, так как существуют неограниченные N-ПП функции. Как и в случае равномерных ПП функций, N-ПП функции образуют кольцо относительно обычных алгебраических операций. Для N-ПП функции $f(x)$, удовлетворяющей соотношению

$$\overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|\, dx < \infty,$$

можно построить (вообще говоря, не единственным образом) ряд Фурье. Основными фактами теории являются теорема единственности, утверждающая, что ряд Фурье однозначно определяет N-ПП функцию, и теорема аппроксимации, показывающая, что каждую такую функцию можно равномерно на каждом конечном интервале сколь угодно хорошо приблизить тригонометрическим полиномом. Эти результаты, принадлежащие автору, приводятся с доказательствами В. А. Марченко.

В гл. 4 рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^{n} f_{jk}(x)\, y_k + g_j(x) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad (1)$$

где f_{jk} и g_j — равномерные ПП функции. Справедлива теорема, принадлежащая автору: Если соответствующая однородная система не имеет ограниченных решений, отличных от нулевого, то каждое ограниченное решение системы (1) состоит из N-ПП функций. Эта теорема аналогична первой теореме Фавара о равномерно ПП решениях системы (1), однако теорема Фавара, как известно, формулируется более сложно. Для N-ПП функций справедлив аналог и второй теоремы Фавара. Обе теоремы Фавара также доказываются в этой главе.

В гл. 5 рассматриваются ПП функции в других метриках. Здесь подробно изложена теория ПП функций Степанова; установлена эквивалентность определений, аналогичных определениям Бора и Бохнера (результат, принадлежащий А. С. Кованько), развита теория рядов Фурье, доказаны равенство Парсеваля (для S^2-ПП функций) и теорема аппроксимации. Столь же подробно изложена теория ПП функций Вейля; в последнем параграфе приводятся некоторые сведения о ПП функциях Безиковича.

Отметим, что изложение в упомянутых пяти главах чисто аналитическое; от читателя требуется лишь знакомство с курсом анализа.

В последней главе части I излагается теория ПП функций на группе (предварительного знакомства с теорией групп не предполагается). После построения среднего значения ПП функций доказываются при помощи метода Вейля равенство Парсеваля и при помощи метода Винера аппроксимационная теорема. В последнем параграфе этой главы излагается идея построения теории ПП функций относительно обобщенного сдвига, развивавшаяся автором. Отметим, что здесь не излагаются те трудности, которые возникают при подобном обобщении теории ПП функций.

Часть II книги посвящена теории аналитических и гармонических ПП функций. Гл. 1 содержит основные сведения по теории аналитических ПП функций. Кроме построения ряда Дирихле для таких функций, доказательства равенства Парсеваля и аппроксимационной теоремы, здесь излагаются вопросы сходимости рядов Дирихле и поведения ПП функций вблизи ∞ (для случая ПП функций в полуплоскости). В гл. 2 и 3 приводятся результаты Ессена относительно среднего движения и плотности нулей аналитической ПП функции и результаты теории гармонических ПП функций, принадлежащие Фавару.

Ю. М. Березанский

См. также: 5670, 5770, 5773, 5821 К, 5878, 5927, 5929, 5950, 5954

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

5731. О восстановлении аналитической функции по ее асимптотическому разложению. Гаврилов Н. И., Сб. матем. отд. физ.-матем. фак. Одесск. ун-та, 1953, 5, 13—17

Дается новый метод восстановления аналитической функции по заданному асимптотическому ряду и доказывается теорема:

Если ряд

$$\sum_1^{\infty} c_k z^{-k} \quad (1)$$

удовлетворяет условию $\overline{\lim}_{n \to \infty} (|M_n| / n!)^{1/n} < 1/2$, то существует по крайней мере одна функция, аналитическая в полуплоскости $|\arg z| < \pi/2$, имеющая ряд

(1) своим асимптотическим разложением в этой полуплоскости и допускающая представление вида $f(z) = \int_0^1 t^{z-1}\varphi(t)\,dt$.

Числа M_n определяются следующим образом: разложим n-членную сумму

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{M_s x^s}{(1+x)(1+2x)\ldots[1+(s-1)x]}$$

в ряд по степеням x и потребуем, чтобы коэффициенты этого разложения совпадали с соответствующими коэффициентами многочлена $\sum_1^n c_k x^k$, где c_k — коэффициенты разложения (1).

Метод автора более эффективен для изучения функции и ее представления в интегральном виде, чем методы Карлемана и Ватсона.

Результат автора является частным случаем результатов Г. В. Бадаляна (Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. н., 1953, 6, № 5—6, 1—63; 1954, 7, № 1, 3—33). А. П. Тамадян

5732. **О достаточных условиях голоморфности функции.** Кафьеро (Sulle condizioni sufficienti per l'olomorfia di una funzione. Cafiero Federico), Ricerche mat., 1953, 2, 58—77 (англ.)

Автор дает достаточные условия для голоморфности комплексной функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ослабляя достаточные условия, данные ранее Монтелем, Ломаном, Меньшовым, Безиковичем и другими (Сакс С. Теория интеграла (русский перевод: М., 1949. *Ред.*)).

Так, показано, что $f(z)$ голоморфна в Δ, если u и v ограничены и непрерывны относительно каждой переменной x, y в Δ, имеют конечные производные числа 1-го порядка в Δ, за возможным исключением множества линейной меры 0 и не более чем счетного множества линейных сегментов, и если первые частные производные от u и v (которые существуют почти всюду в Δ) удовлетворяют уравнениям Коши — Римана почти всюду в Δ. E. F. Beckenbach

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 411

5733. **Интегралы от дифференцируемых функций.** Кашанин (Интегрални диференцијабилних функција. Кашанин Радивоје), Зб. радова Српска АН, 1953, 35, № 3, 29—44 (серб.; резюме франц.)

Доказывается средствами классического анализа утверждение: Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — дифференцируемые функции в открытой области D, удовлетворяющие условию $P'_y = Q'_x$ в каждой точке этой области, и если замкнутая линия K ограничивает область, лежащую в D и удовлетворяющую некоторым дополнительным условиям, то $\int_K (Pdx + Qdy) = 0$.

Это утверждение было доказано Г. П. Толстовым (Успехи матем. наук, 1948, 3, № 5, 167—170) в предположении, что K есть ломаная линия, звенья которой параллельны осям координат, причем доказательство также проводилось средствами классического анализа. Утверждение автора получается как следствие из результата Г. П. Толстова.

Далее предлагается следующее определение гармонической функции:

Функция $U(x, y)$ называется гармонической в области D, если в каждой точке этой области частные производные U'_x, U'_y дифференцируемы и, кроме того, выполняются равенства

$$U''_{yx} = U''_{xy}, \qquad U''_{yy} = -U''_{xx}. \tag{1}$$

Однако, как известно, функция $U(x, y)$ является гармонической в обычном смысле слова при значительно меньших предположениях, а именно, справедлива теорема: Если $U(x, y)$ ограничена в области D и если в каждой точке этой области выполняется второе равенство (1), то $U(x, y)$ является гармонической функцией в D (Толстов Г. П., Матем. сб., 1951, 29 (71), 559—563; Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, М. — Л., 1950, 210).

Остальные результаты работы также известны. Д. Е. Меньшов

5734. **О тейлоровских коэффициентах и особых точках аналитических функций.** Тегем (Sur les coefficients tayloriens et les points singuliers des fonctions analytiques. Teghem J.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 40, № 5, 518—525 (франц.)

Ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+n}{\nu}\alpha^{\nu+1}(1-\alpha)^n u_\nu,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(1-\beta)^{-(n+1)}(-\beta)^{n-\nu}u_\nu$$

называются соответственно преобразованиями $\Pi(\alpha)$ (Лорана) и $[E, \beta]$ (Эйлера — Кноппа) ряда $\sum_0^\infty u_n$.

Пусть степенной ряд $\sum_0^\infty a_n z^n$ имеет радиус сходимости $r > 0$ и пусть ряды

$$\alpha z^{-1}\sum_0^\infty A_n(1-\alpha z^{-1})^n, \tag{1}$$

$$(1-\beta z)^{-1}\sum_0^\infty B_n[\beta z(1-\beta z)^{-1}]^n, \tag{2}$$

где $0 < |\alpha| \leq r$, являются соответственно преобразованиями $\Pi(\alpha z^{-1})$ и $[E, \beta z]$ степенного ряда. Утверждается (со ссылкой на другие работы), что суммы рядов (1) и (2) совпадают в областях сходимости со значением аналитической функции $f(z)$, определенной рядом $\sum_0^\infty a_n z^n$, или ветвью этой функции, совпадающей с $\sum_0^\infty a_n z^n$ в окрестности начала. Используя необходимые условия для суммируемости методами $\Pi(\alpha)$ и $[E, \beta]$, автор устанавливает предложения относительно поведения аналитической функции на бесконечности и ее особых точках.

1. Если для некоторого α, $0 < |\alpha| < r$, $\overline{\lim}\,|A_n|^{1/n} < 1$ или для некоторого β $\overline{\lim}\,|B_n|^{1/n} < 1$, то ряд $\sum_0^\infty a_n z^n$ представляет в окрестности начала аналитическую функцию (или ветвь аналитической функции), имеющую нуль на бесконечности.

2. Пусть для некоторого α, $0 < |\alpha| < r$, $\overline{\lim}\,|A_n^{(m)}|^{1/n} < 1$ или для некоторого β $\overline{\lim}\,|B_n^{(m)}|^{1/n} < 1$, где $A_n^{(m)}$ и $B_n^{(m)}$ совпадают с A_n и B_n, соответствующими ряду $\sum_{n=m}^\infty a_n z^{n-m}$. Тогда ряд $\sum_0^\infty a_n z^n$ представляет в окрестности начала функцию (или ветвь функции), голоморфную на бесконечности или имеющую полюс порядка $< m$.

3. Если для некоторого α, $0 < |\alpha| < r$, $\overline{\lim}\,|A_n|^{1/n} < 2^{-1/2}$ или для некоторого β $\overline{\lim}\,|B_n|^{1/n} < 1$, то ряд $\sum_0^\infty a_n z^n$ представляет в окрестности начала аналитическую функцию (или ветвь аналитической функции), выпуклая оболочка особых точек которой не содержит точки $z = 0$. Н. А. Давыдов

5735. **Об определении аналитических функций условиями, наложенными на их последовательные производные.** Комб (Sur la détermination des fonctions analytiques par des conditions imposées à leurs dérivées successives Combes Jean), Bull. sci. math., 1954, 78, sept.— oct., 199—216 (франц.)

Приводятся доказательства ранее сформулированных предложений (РЖМат, 1954, 5535). В. Л. Гончаров

36. О приближении ограниченными аналитическими функциями. Уолш (Sur l'approximation par fonctions analytiques bornées. Walsh Joseph L.), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 21, 1339—1341 (франц.)

Пусть A — кольцо, ограниченное жордановыми кривыми C_1 и C_0, причем C_0 лежит внутри C_1; $u(z)$ — функция, гармоническая в A, непрерывная в $\bar{A}$, равная нулю на C_0 и 1 на C_1. Обозначим через $C_\sigma (0<\sigma<1)$ кривую в A, на которой $u(z)=\sigma$; пусть R — модуль кольца A.

Теорема. Если $f(z)$ — функция, аналитическая в кольце между C_0 и C_σ и непрерывная в замыкании этого кольца, причем на C_σ, $\sigma = \ln R_0 / \ln R < 1$, $f^{(p)}(z) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, то существуют функции $F_n(z)$, аналитические в кольце A и непрерывные в его замыкании, для которых

$$|f(z)-F_n(z)| \leqslant B_1/(R_0^n n^{p+\alpha}),\ z\in C_0,$$

$$|F_n(z)| \leqslant B_2 R^n/(R_0^n n^{p+\alpha}),\ z\in A.$$

Обратно, если указанные неравенства выполнены для непрерывной на C_0 функции $f(z)$, то при p целом $f(z)$ — аналитическая в кольце (C_0, C_σ) и $f^{(p-1)}(z)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ на C_σ.

В случае кругового кольца в качестве $F_n(z)$ берется сумма главной части и частичной суммы правильной части ряда Лорана, в общем случае кольцо A отображается на круговое. П. К. Суетин

5737. Некоторые граничные свойства аналитических функций. Баджемил, Зейдель (Some boundary properties of analytic functions. Bagemihl F., Seidel W.), Math. Z., 1954, 61, № 2, 186—199 (англ.)

Пусть $0<R\leqslant\infty$. Монотонным граничным путем $|z|<R$ называется такая непрерывная кривая $z=z(\mu)$ $(0\leqslant\mu<1)$ в $|z|<R$, $z(0)=0$, что $|z(\mu)|\to R$ монотонно при $\mu\to 1$. Рассматриваются семейства T таких путей подчиненные некоторым условиям, в основном обеспечивающим возможность представления семейства T в виде счетной суммы подсемейств, каждое из которых замкнуто и нигде не плотно внутри $|z|<R$. Доказывается основная теорема, утверждающая, что каковы бы ни были семейство путей T и непрерывная комплекснозначная в $|z|<R$ функция $f(z)$, существует такая регулярная в $|z|<R$ функция $g(z)$, что предельные значения функций $g(z)$ и $f(z)$ совпадают вдоль всякого пути из T (при $R=\infty$ теорема следует из результатов М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева (Докл. АН СССР, 1939, 23, 746—748)). В доказательстве существенно используется теорема С. Н. Мергеляна (Докл. АН СССР, 1951, 78, 405—408) о приближении полиномами функций на замкнутых множествах. В следующих §§ 3—7 статьи содержатся более или менее непосредственные следствия основной теоремы, получаемые путем частного подбора функции $g(z)$. Дается следующее усиление примеров Лузина — Привалова: каковы бы ни были число ω расширенной комплексной плоскости и фиксированное направление, существует непостоянная регулярная в $|z|<R$ функция, которая почти по всем радиусам стремится к ω в заданном направлении. Доказывается существование регулярной функции в $|z|<R$, для которой множество предельных значений для почти каждого радиуса есть заданный континуум, и некоторые обобщения этого утверждения. Исследуются необходимые и достаточные условия, при которых действительные функции $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$, заданные на множестве 1-й категории, являются предельными значениями действительной и мнимой частей регулярной функции вдоль кривых семейства T (τ — параметр, связанный с семейством T). В § 7 содержатся утверждения типа теоремы Кирста — Мазуркевича (Kierst S., Fundam. math., 1936, 27, 226—233), характеризующие дескриптивную структуру множества предельных значений, и обобщается пример Гросса функции с предельными значениями, заполняющими плоскость. И. Н. Песин

5738. О множествах радиальных и угловых предельных значений аналитических функций. Коллингвуд (Sur les ensembles d'accumulation radiaux et angulaires des fonctions analytiques. Collingwood Edward F.), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 18, 1769—1771 (франц.)

Пусть $f(z)$ — функция, мероморфная в $|z|<1$, $C_\rho(f, e^{i\theta})$ — множество, определенное так: $a\in C_\rho(f,e^{i\theta})$, если существует такая последовательность $\{r_n\}$, что $r_n\to 1$ и $f(r_n e^{i\theta})\to a$ при $n\to\infty$. Очевидно, что $C_\rho(f, e^{i\theta})$ не пусто и состоит из одной точки или из континуума. Аналогично определяются множества $C_{\rho(\varphi)}(f, e^{i\theta})$ и $C_\Delta(f, e^{i\theta})$ при рассмотрении вместо радиуса соответственно хорды, составляющей угол φ с радиусом $(-\pi/2<\varphi<\pi/2)$, и угла Δ с вершиной в $e^{i\theta}$, расположенного в $|z|<1$. Далее пусть $S(f)$ — множество точек $z=e^{i\theta}$, для которых $C_\rho(f, e^{i\theta})$ покрывает всю плоскость, и $I(f)$ — множество точек Плеснера функции $f(z)$, т. е. точек $z=e^{i\theta}$, для которых в любом угле Δ с вершиной в $e^{i\theta}$ множество $C_\Delta(f, e^{i\theta})$ заполняет всю плоскость. Приводятся следующие теоремы для $f(z)$, мероморфной в $|z|<1$:

1. Если $I(f)$ плотно на дуге α окружности $|z|=1$, то $I(f)\cap\alpha$ не может быть множеством 1-й категории на α.

2. Множество $S(f)\setminus I(f)$ 1-й категории на $|z|=1$.

3. Если одно из множеств $S(f)$ и $I(f)$ плотно на дуге α окружности $|z|=1$, то $S(f)\cap I(f)\cap\alpha$ не является множеством 1-й категории на α.

Теоремы 2 и 3 остаются справедливыми и при замене $S(f)$ на $S_{\rho(\varphi)}(f)$.

Формулируются две леммы, на которых основывается доказательство теорем.

Лемма 1. Пусть $f(z)$ мероморфна в $|z|<1$ и существует множество $\mathfrak{M}(\theta)$ точек $e^{i\theta}$, не входящих в $S(f)$, второй категории на дуге α окружности $|z|=1$. Тогда существует такая дуга $\beta\subseteq\alpha$, что: 1) β есть дуга Фату функции $f(z)$ (т. е. вблизи этой дуги либо $f(z)$, либо $[f(z)-a]^{-1}$ при некотором $a\neq\infty$ остаются ограниченными); 2) $\mathfrak{M}(\theta)$ плотно на β.

Лемма 2 формулируется аналогично лемме 1 с заменой $S(f)$ на $I(f)$. Г. Ц. Тумаркин

5739. Функции ядра и класс L^2. Блок (Kernel functions and class L^2. Block I. Edward), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 1, 110—117 (англ.)

Пусть B — ограниченная область плоскости z ($z=x+iy$) с границей, состоящей из конечного числа аналитических жордановых кривых, $L^2(B)$ — пространство измеримых функций, суммируемых с квадратом по области B, а $\mathfrak{L}^2(B)$ — подпространство $L^2(B)$ аналитических в B функций. Пусть также $(f, g)=\iint_B f\bar{g}\,dx\,dy$ и $K(z,\zeta)$ — функция ядра области B. Функция $f_1(z)=(f, K)$, где $f\in L^2(B)$, принадлежит $\mathfrak{L}^2(B)$. Если функция $f_2(z)$ определяется равенством $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$, то при помощи ядра Бергмана — Шиффера $L(z,\zeta)=-2\pi^{-1}\partial^2 g(z,\zeta)/\partial z\,\partial\zeta$, где $g(z,\zeta)$ —

функция Грина области B, показывается, что $f_2(z)$ есть проекция функции $f(z)$ на ортогональное дополнение к $\mathfrak{L}^2(B)$.

Обозначим $L(f) = (f, L)$ (интеграл понимается в смысле главного значения), тогда почти всюду $L[L(f)] = f_2(z)$. Наконец, показывается, что множество функций $L^2(B)$, удовлетворяющих условию Липшица порядка α $(0 < \alpha < 1)$, остается инвариантным при преобразованиях $L(f)$. С. Н. Мергелян

5740. **О производной полинома и чебышевской аппроксимации. Моцкин, Уолш** (On the derivative of a polynomial and Chebyshev approximation. Motzkin T. S., Walsh J. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 1, 76—87 (англ.)

Пусть E — замкнутое ограниченное множество точек на плоскости z и $\mu(z) > 0$, $f(z)$ — непрерывные функции на E. Полином Чебышева наилучшего приближения $f(z)$ на E при весе $\mu(z)$ степени m обозначим через $t_m(z)$.

Изучаются свойства этого полинома (явное выражение, расположение нулей) в том случае, когда E состоит из конечного числа точек.

Доказывается, в частности, утверждение: Если E — множество n различных точек $z_1, \ldots, z_n$ $(n > 1)$, $\omega(z) = \prod_1^n (z - z_k)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — положительные числа с $\sum_1^n \lambda_i = 1$, то полином Чебышева $t_{n-1}(z)$ для множества E и весовой функции $\mu(z_i) = (\lambda_i |\omega'(z_i)|)^{-1}$ есть

$$t_{n-1}(z) = \omega(z) \sum_1^n \lambda_i (z - z_i)^{-1}.$$

При этом аргумент $t_{n-1}(z)$ не зависит от выбора $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Начало координат расположено в наименьшем выпуклом многоугольнике, содержащем точки $\lambda_i \omega'(z_i) = t_{n-1}(z_i)$. С. Н. Мергелян

5741. **О некоторых асимптотических соотношениях в теории ортогональных многочленов. Геронимус Я. Л.**, Докл. АН СССР, 1954, 96, № 6, 1097—1100

В дополнение к ранее известным асимптотическим соотношениям для многочленов, ортогональных на единичной окружности относительно некоторого обложения (см. Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, М.— Л., Гостехиздат, 1950, где дан обзор ранее полученных в этом направлении результатов), автор устанавливает ряд новых асимптотических формул. Пусть $\{P_n(z)\}$ — многочлены, ортогональные на единичной окружности относительно некоторого обложения $d\sigma(\theta)$:

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} P_n(e^{i\theta}) \overline{P_m(e^{i\theta})}\, d\sigma(\theta) = \delta_{mn},$$

$$P_n^*(z) = z^n \overline{P_n(z^{-1})},$$

и пусть $Q_n(z)$ являются коэффициентами формального разложения

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \sim c_0 \sum_0^\infty \overline{P_n(\zeta)} Q_n(z), \quad \zeta \neq z, \quad c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma(\theta). \quad (1)$$

Теорема. 1) в $|z| < 1$ $\sum_0^\infty |Q_n(z)|^2 < \infty$ (доказано автором ранее); 2) существует подпоследовательность $\{n_\nu\}$, для которой

$$c_0 \lim_{\nu \to \infty} \left\{ \frac{P_{n_\nu}^*(z) Q_{n_\nu}(z)}{z^{n_\nu}} \right\} = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\psi(\theta), \quad |z| < 1,$$

где $\psi(\theta)$ — неубывающая на $[0, 2\pi]$ функция с бесчисленным множеством точек роста, к которой сходится в основном подпоследовательность функций

$$\psi_{n_\nu}(\theta) = \int_0^\theta |P_{n_\nu}^*(e^{i\theta})|^2\, d\sigma(\theta), \quad \lim_{\nu \to \infty} \psi_{n_\nu}(\theta) = \psi(\theta), \quad (2)$$

3) если

$$\int_0^{2\pi} \lg \sigma'(\theta)\, d\theta > -\infty, \quad (3)$$

то в $|z| < 1$

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{Q_n(z)}{z^n} \right\} = \frac{2}{c_0 \pi(z)},$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_0^\theta |P_{n_\nu}^*(e^{i\theta})|^2\, d\sigma(\theta) = 0;$$

где $\pi(z)$ — аналитическая в $|z| < 1$ функция. Кроме того, при выполнении (3) разложение (1) сходится при $|z| < 1$, $|\zeta| < 1$, $\zeta \neq z$, а сходимость (2) в этом случае равномерная.

В работе приводятся и некоторые другие асимптотические соотношения, в частности дается теорема, устанавливающая зависимость между ограниченностью бесконечной подпоследовательности $\{P_{n_\nu}(z)\}$ и свойствами функции $\sigma(\theta)$. Г. Ц. Тумаркин

5742. **О равномерном приближении непрерывных функций рациональными функциями с заранее заданными полюсами. Ландау** (On uniform approximation to continuous functions by rational functions with preassigned poles. Landau Henry J.) Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 671—676 (англ.)

Пусть ограниченное замкнутое множество E разбивает плоскость. Любое открытое множество C такое что $E \cap$ (дополнение к C) уже не разбивает плоскость, называется сечением множества E.

Опираясь на метод, развитый в работах М. В. Келдыша (Матем. сб., 1945, **16** (58), 249—258) и С. Н. Мергеляна (Докл. АН СССР, 1951, **78**, 405—408), автор доказывает теорему:

Пусть даны замкнутое ограниченное множество точек E, не имеющее внутренних точек, и точки $z_1, z_2, \ldots$, причем в каждой из областей, на которые разбивается плоскость множеством E, лежит хотя бы одна точка из $\{z_k\}$. Если существует сечение множества E, замыкание которого имеет произвольно малую меру, то любая функция $f(z)$, непрерывная на E, может быть равномерно аппроксимирована на E рациональными функциями с полюсами в точках $\{z_k\}$.

Следует отметить, что приведенный в начале статьи пример, показывающий, что равномерная аппроксимация непрерывных функций рациональными функциями, вообще говоря, невозможна для произвольных замкнутых ограниченных множеств, не имеющих внутренних точек, принадлежит А. Рот (Roth Alice Comment. math. helv., 1938, **11**, 77—125).

М. М. Джрбашян

5743. **К приближенному конформному отображению правильных многоугольников. Мюллер** (Zur genäherten konformen Abbildung regulärer Polygone Müller Heinz), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952/1953, **2**, № 3, 393—400 (нем.)

Для приближенного определения функции $w(z)$, конформно отображающей $|z| > 1$ на внешность правильного n-угольника (одна из сторон которого лежит на прямой $\mathrm{Re}\, w = A$, а центр находится в точке $w = 0$),

предлагается аппроксимировать $w(z)$ полиномами $w_p(z)=\sum_{\sigma=0}^{p-1} a_{\sigma n-1}^{(p)} z^{-(\sigma n-1)} = u_p(r,\varphi)+iv_p(r,\varphi)$, доставляющими в классе полиномов такого вида минимум интегралу $\int_0^{\pi/n}[u_p(1,\varphi)-A]^2\,d\varphi$. Доказывается сходимость $w_p(z)$ к $w(z)$ в среднем на $|z|=1$ и равномерная сходимость в $|z|\geqslant q>1$. Приведенные примеры позволяют предполагать, что $w_p(z)$ дают несколько лучшее приближение, чем соответствующие отрезки ряда Лорана для $w(z)$. П. П. Куфарев

5744. Некоторые критерии однолистности. Нехари Зеев (Some criteria of univalence. Nehari Zeev), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 700—704 (англ.)

Производная Шварца аналитической функции $w=f(z)$ определяется равенством

$$\{w,\ z\}=(w''/w')'-\frac{1}{2}(w''/w')^2.$$

Обобщая свои результаты (Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 545—551) и результаты референта (Докл. АН СССР, 1951, 79, № 5, 743—746), автор доказывает теорему 1:

Функция $f(z)$ однолистна в круге $|z|<1$, если

$$|\{f(z),\ z\}|\leqslant 2p(|z|),$$

где $p(x)$ — функция, обладающая свойствами: а) $p(x)$ положительна и непрерывна для $-1<x<1$, б) $p(-x)=p(x)$, в) функция $(1-x^2)^2p(x)$ не возрастает при изменении x от 0 до 1, г) уравнение $y''+p(x)y=0$ имеет решение, не обращающееся в 0 на (—1, 1). Константа 2 не может быть заменена бо́льшим числом.

Сводя краевую задачу:

$$y''+\lambda p(x)y=0,\qquad y(-1)=y(1)=0$$

к интегральному уравнению, автор получает также следующий критерий однолистности: если

$$|\{f(z),\ z\}|\leqslant\frac{2p(|z|)}{\int_0^1(1-x^2)\,p(x)\,dx}$$

и $p(x)$ удовлетворяет условиям а), б), в) теоремы 1, то $f(z)$ однолистна в круге $|z|<1$. В. В. Покорный

5745. Соотношения, связанные с емкостью при конформном отображении области с разрезами. Хельстрём (Kapazitätsbeziehungen bei konformer Abbildung von Einschnittgebieten. Hällström Gunnar af), Math. scand., 1953, 1, № 1, 131—136 (нем.)

Рассматривается конформное отображение круга $|z|<1$ на область D, получающуюся из круга $|w|<1$ путем проведения конечного или счетного множества радиальных разрезов, направленных от точек окружности $|w|=1$ внутрь и удовлетворяющих следующим условиям: 1) вдоль разрезов $0<\inf|w|=W<1$; 2) достижимые граничные точки области D расположены всюду плотно на окружности $|w|=1$. Отображающая функция $w=w(z)$ нормирована условием $w(0)=0$. Автор доказал ранее (Soc. scient. fennicae. Comment. phys.-math., 1952, 16, № 13; Acta Acad. Aboensis. Math. et phys., 1952, 18, № 6), что множество всех точек окружности $|z|=1$, соответствующих граничным точкам области D, лежащим на окружности $|w|=1$ или образующим простые концы второго рода, содержащие точки окружности $|w|=1$, является приведенным множеством (оно обозначается в дальнейшем через $\varkappa$, а его емкость — через $C>0$). Если множеству простых концов второго рода границы области D, о которых говорилось выше, соответствует множество $\varkappa''\subset\varkappa$ нулевой емкости, то область D называется «редкой» («разреженной»); если же емкость множества $\varkappa''$ положительна, то область D называется «густой». Устанавливаются соотношения между величинами C, W и $|w'(0)|$.

1. Всегда $|w'(0)|\leqslant C^2$, причем равенство имеет место для «редкой», а неравенство — для «густой» области D.

2. $W<|w'(0)|\leqslant 4W(1+W)^{-2}$, причем эти оценки наилучшие возможные.

3. Всегда $W^{1/2}<C$, а в случае «редкой» области, кроме того, $C\leqslant 2W^{1/2}(1+W)^{-1}$.

4. Каковы бы ни были фиксированное $W\in(0,\ 1)$ и $\varepsilon>0$, можно построить такую «густую» область D, что $C>1-\varepsilon$ (эта теорема устанавливает существенность оговорки относительно «редкой» области в теореме 3).

5. Если $\varkappa$ — приведенное множество точек окружности $|z|=1$, которому соответствуют «густые» области D, то $0<W<W_0$, где W_0 — значение W для «редкой» области D, соответствующей тому же множеству $\varkappa$. Наоборот, для любого $W\in(0,\ W_0)$ может быть построена «густая» область D, соответствующая множеству $\varkappa$.

По утверждению автора, для любого замкнутого приведенного множества $\varkappa$ на $|z|=1$ может быть построена «редкая» область D, однозначно определяемая с точностью до угла поворота вокруг точки $w=0$. Что касается «густых» областей, то они соответствуют не всякому замкнутому приведенному множеству $\varkappa$ и определяются этим множеством неоднозначно.

В. А. Зморович

5746. Симметризационные результаты для некоторых конформных инвариантов. Дженкинс (Symmetrization results for some conformal invariants. Jenkins James A.), Amer. J. Math., 1953, 75, № 3, 510—522 (англ.)

Рассматривается применение метода «круговой симметризации» однолистных n-связных областей $(1<n<\infty)$ для доказательства двух неравенств (теоремы 1 и 2), относящихся к некоторым конформным инвариантам этих областей, называемым автором «модулями» и введенным в одной из прежних его работ (Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, 327—350). На основании этих неравенств, при помощи довольно сложной симметризационной конструкции, доказывается вспомогательная теорема 3, из которой выводится следующая теорема о классе S регулярных однолистных в $|z|<1$ функций $f(z)$ с разложением $f(z)=z+\Sigma_2^\infty b_\nu z^\nu$.

Теорема 4. Если $f(z)\in S$ и $0<r_1\leqslant r_2<1$, то

$$|f(-r_1)|+|f(r_2)|\leqslant r_1(1+r_1)^{-2}+r_2(1-r_2)^{-2},$$

причем равенство достигается для функции $f(z)=z(1-z)^{-2}$. К этой теореме указываются следующие следствия для $f(z)\in S$:

1) Если $0<r_1\leqslant r_2<1$, то

$$|f(-r_1e^{i\theta})|+|f(r_2e^{i\theta})|\leqslant r_1(1+r_1)^{-2}+r_2(1-r_2)^{-2},$$

причем равенство достигается для функции $f(z)=z(1-ze^{-i\theta})^{-2}$.

2) Если $0<r<1$, то при $|z_1|=r$

$$|f(-z_1)|+|f(z_1)|\leqslant 2r(1+r^2)(1-r^2)^{-2},$$

причем равенство достигается для функции $f(z)=z(1-ze^{-i\theta})^{-2}$, где $\theta=\arg z_1$.

3) $|b_3|\leqslant 3$.

Автор указывает, что теорема 4 есть усиление одной теоремы Г. М. Голузина (Матем. сб., 1946, 18 (60), 379—389), однако не подчеркивает, что этой

последней является следствие 2) и что прием доказательства оценки $|b_3| \leqslant 3$, используемый автором, тоже принадлежит Г. М. Голузину (см. вышеприведенную ссылку). В. А. Зморович

5747. Об одной вариационной задаче Неванлинна. Херш (A propos d'un problème de variation de R. Nevanlinna. Hersch Joseph), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1954, sar. AI, № 168, 1—7 (франц.)

Пусть $Q(\beta', \alpha', \beta'', \alpha'')$ — криволинейный четырехугольник, ограниченный жордановыми дугами β', α', β'' и α'',

$$m_{\beta'\beta''} = \sup_{c \in \{C\}} \min_{z \in c} (\omega_{z,\beta'} + \omega_{z,\beta''}),$$

где $\omega_{z,\beta'}$ — гармоническая мера β' в точке z относительно $Q(\beta', \alpha', \beta'', \alpha'')$, $\{C\}$ — семейство жордановых дуг, содержащихся в Q и соединяющих β' с β''.

В случае, когда Q — прямоугольник и длины β' и β'' равны b, а длины α' и α'' равны a, то модулем Q называется отношение a/b. Это определение модуля переносится на любой криволинейный четырехугольник посредством конформного отображения на соответствующий прямоугольник так, чтобы стороны соответствовали друг другу. В работе устанавливается соотношение между $m_{\beta'\beta''}$ и модулем $\mu_{\beta'\beta''}$:

$$\mu_{\beta'\beta''} = 4\nu\left(\sin\frac{\pi m_{\beta'\beta''}}{2}\right) = 2\nu\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi m_{\beta'\beta''}}{4}\right), \quad (1)$$

где $\nu(r) = K(\sqrt{1-r^2})/[4K(r)]$ и $K(r) = \int_0^1 [(1-x^2) \times (1-r^2x^2)]^{-1/2} dx$.

Указываются некоторые применения равенства (1): Если c — жорданова дуга, соединяющая β' с β'', и $r(z)$ — евклидово расстояние точки z от дуги $\alpha' \cup \alpha''$, то имеет место неравенство

$$\operatorname{tg}(\pi m_{\beta'\beta''}/4) \geqslant \exp\left[-\int_c r^{-1}(z)\,|dz|\right],$$

которое уточняет неравенство Неванлинна.

Устанавливается связь между гиперболической мерой и функцией Грина, с одной стороны, и величиной $m_{\beta'\beta''}$, с другой стороны.

Дается выражение для $\mu_{\beta'\beta''}$ через значения $\omega_{z,\beta'}$ и $\omega_{z,\beta''}$ на жордановой дуге γ, соединяющей α' с α'', и показывается, что

$$\mu_{\beta'\beta''} = 2\nu\left[\max_{z\in\gamma}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\omega_{z,\beta'}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi\omega_{z,\beta''}}{2}\right)\right].$$

Доказывается также неравенство

$$\mu_{\beta'\beta''} \leqslant 2\nu\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\omega_{z,\beta'}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi\omega_{z,\beta''}}{2}\right),$$

которое не может быть существенно улучшено. С. Н. Мергелян

5748. Вариация многолистных функций. Гельфер С. А., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 6, 885—888

Вводится класс $F_p^q(a_1, \ldots, a_m)$; функция $z = f(\zeta) \in F_p^q(a_1, \ldots, a_m)$, если она удовлетворяет условиям: 1) $f(\zeta)$ регулярна в круге $|\zeta| < 1$, $f(0) = 0$; 2) $f(\zeta)$ отображает $|\zeta| < 1$ взаимно однозначно на область D, лежащую на какой-нибудь p-листной алгебраической римановой поверхности R жанра γ, не превосходящего фиксированного числа g, причем все функции, отображающие $|\zeta| < 1$ на области одной и той же римановой поверхности, переводят точку $\zeta = 0$ в одну и ту же точку поверхности, лежащую над точкой $z = 0$; 3) $f(\zeta)$ выпускает в $|\zeta| < 1$ заданную систему значений: $a_1, \ldots, a_m$.

Автор, опираясь на вариационные формулы Г. М. Голузина (Матем. сб., 1946, 19 (61), № 2, 203—236), получает подобные им вариационные формулы для класса $F_p^q(a_1, \ldots, a_m)$. Н. А. Лебедев

5749. Нормальность семейства голоморфных функций в связи с дефектом значения их производных. Сюй Цзин-лай (La normalité d'une famille de fonctions holomorphes en liaison avec le défaut d'une valeur de leurs dérivées. Hsiong King-Lai), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 24, 2279—2281 (франц.)

В заметке развиваются результаты, ранее полученные автором (РЖМат, 1953, 699—701; 1955, 705). В теореме А устанавливается неравенство для $\ln|f(z)|$ в случае голоморфной в круге $|z| < 1$ функции $f(z)$ с разложением

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots \quad (c_0, c_1, c_2 \neq 0), \quad (1)$$

причем $f(z)$ имеет не более p нулей в $|z| < 1$, $f'(z)$ имеет 1 дефектным значением с дефектом (в смысле Неванлинна) $l > 0$, и $f(z)$ не имеет исключительных интервалов (в смысле Неванлинна) (Nevanlinna R., Le théorème de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, Gauthier-Villars, 1929) Применяя полученное неравенство, автор получает новые критерии нормальности и квазинормальности семейства голоморфных функций. Приведем один из критериев:

Пусть дано семейство функций $f(z)$ с разложением вида (1) в $|z| < 1$, причем функции не имеют исключительных интервалов и значения $|f(0)|$ ограничены сверху. Если функции семейства имеют не более p нулей в $|z| < 1$, их производные $f'(z)$ имеют 1 дефектным значением с дефектом $l > 0$ и все $f'(z)$ принимают на окружности $|z| = r$ значение 1 не более $n_1(r)$ раз, где $n_1(r)$ зависит только от r, то семейство функций $f(z)$ будет нормальным в $|z| < 1$, если только $f'(0) \neq 1$. Г. Ц. Тумаркин

5750. Об интерполировании целых трансцендентных функций конечной степени. Ахиезер Н. И., Левин Б. Я., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 40. Зап. матем. отд. физ.-матем. фак. Харьковск. ун-та и Харьковск. матем. о-ва, 1952, 23, 5—26 (журнал вышел из печати в 1954 г.)

Известен следующий результат Картрайт (Cartwright M. L., Quart. J. Math., 1936, 7, 46—55). Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа $\sigma < \pi$. Если $|f(k)| \leqslant M$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то тогда $f(z)$ является ограниченной на всей действительной оси. Этот результат обобщался на случай узлов λ_k, отличных от целых точек. Так, в статье Б. Я. Левина (Докл. АН СССР, 1949, 65, № 3, 265—268) узлы λ_k удовлетворяют лишь неравенствам: $|k - \lambda_k| \leqslant L$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и

$$|\lambda_n - \lambda_m| > 2\delta \text{ (при } n \neq m), \quad (1)$$

где L и δ — какие-нибудь положительные числа. Кроме этого, в этой статье и статье Н. И. Ахиезера (Докл. АН СССР, 1949, 65, № 5, 781—784) условие Картрайт $\sigma < \pi$ заменено менее ограничительными условиями.

В реферируемой статье рассматривается случай, когда в неравенстве (1) $\delta = 0$. В этом случае последовательность $\{\lambda_k\}$ разбивается на группы (в группу объединяются близкие узлы), число элементов в группе не превосходит некоторого числа r и расстояние между узлами из разных групп ограничено снизу положи-

тельной константой. В соответствии с этим вводятся величины

$$f(\mu_1), f(\mu_1, \mu_2) = [f(\mu_2) - f(\mu_1)]/(\mu_2 - \mu_1), \ldots,$$

$$f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r) =$$

$$= [f(\mu_2, \ldots, \mu_r) - f(\mu_1, \ldots, \mu_{r-1})]/(\mu_r - \mu_1),$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ — произвольные (в количестве r) узлы из $\{\lambda_k\}$.

Доказывается теорема: Если для произвольных узлов $\mu_1, \ldots, \mu_r$ из $\{\lambda_k\}$ указанные величины ограничены по модулю и функция $f(z)$ — целая экспоненциального типа, у которой ширина индикаторной диаграммы по мнимой оси меньше 2π, то $f(z)$ ограничена на всей действительной оси.

Эта теорема затем обобщается на случай кратных узлов. Доказательства основаны на использовании новых интерполяционных формул для рассматриваемых функций. А. Ф. Леонтьев

5751. Дифференциальные операторы бесконечного порядка. Климчак (Differential operators of infinite order. Klimczak W. J.), Duke Math. J., 1953, 20, № 2, 295—319 (англ.)

Рассматривается оператор вида $G(D_z) = \sum_0^\infty g_k D_z^k$, где g_k — постоянные, $G(w)$ — целая функция и D_z — линейный дифференциальный оператор порядка s с аналитическими коэффициентами:

$$D_z = \sum_{j=0}^{s} P_j(z)\, d^{s-j}/dz^{s-j}.$$

Ставится задача: каким условиям должна удовлетворять функция $G(w)$ для того, чтобы оператор был применим ко всем функциям из того или иного класса? Пусть функции $P_j(z)$ регулярны в области Δ. По определению, оператор применим к классу $F(\Delta_1)$ функций $f(z)$, аналитических в области $\Delta_1 \subset \Delta$, если ряд $G(D_z) f(z) = \sum_0^\infty g_k D_z^k f(z)$ равномерно сходится в каждой ограниченной замкнутой части Δ_1 для каждой функции $f(z)$ из $F(\Delta_1)$.

Теорема. Для того чтобы оператор был применим к классу $F(\Delta_1)$, необходимо и достаточно, чтобы целая функция $G(w)$ была конечного порядка, меньшего $1/s$, или порядка $1/s$ и нулевого типа. В том случае, когда порядок функции $G(w)$ больше $1/s$, делается предположение, что $P_j(z)$ — многочлены, и выясняется, при каких условиях оператор применим к классу $F(\rho)$ целых функций $f(z)$ порядка $\leqslant \rho$ или классу $F(\rho, \alpha)$ целых функций, растущих не быстрее целой функции порядка ρ типа α. Наиболее подробно исследование проводится для $s = 2$ и $m = 0, 1, 2$, где m — степень многочлена $P_0(z)$.

Приведем один из полученных результатов. Пусть $s = 2$, $m = 0$, $N_0 = \max[p + 1, (q + 2)/2]$, где p и q — степени многочленов $P_1(z)$ и $P_2(z)$. Для того чтобы оператор был применим к классу $F(\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $G(w)$ была порядка $< \sigma$, где

$$\sigma = N_0/[2(N_0 - 1)], \text{ если } \rho < N_0,$$

и

$$\sigma = \rho/[2(\rho - 1)], \quad \text{если } \rho \geqslant N_0.$$

Другие результаты аналогичны. А. Ф. Леонтьев

5752. Задачи Ватсона, нули мероморфных функций, эквивалентность различных проблем единственности. Мальявен (Problèmes de Watson, zéros des fonctions méromorphes, équivalence de divers problèmes d'unicité. Malliavin Paul), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 26, 2481—2483 (франц.)

Указываются без доказательств главные результаты диссертации автора.

Пусть заданы последовательность чисел $\{M_n\}$ $(M_n > 1)$ и функция $k(r)$ с $|k(r) - k(r')| = O[\ln(r/r')] + O(1)$.

Задача $W(M_n, k(r))$ состоит в следующем: найти такую голоморфную функцию $g(z) \not\equiv 0$ в полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > 0$, что $|g(z)| < M_n e^{-nk(r)}$, где $n = [\mathrm{Re}(z)]$ ($[\alpha]$ — целая часть числа α) и $r = |z|$.

Положим $M(s) = \sup_n (ns - \ln M_n)$, $k_0(r) = \inf_{r' \geqslant r} k(r')$, $k^0(r) = \sup_{r' \leqslant r} k(r')$.

Имеют место следующие утверждения:

I. Если для любого $a > 0$

$$\int^\infty M(k_0(r) - a)\, r^{-2} dr = \infty,$$

то $W(M_n, k(r))$ не имеет решения.

II. Если для любого $a > 0$

$$\int^\infty M(k^0(r) - a)\, r^{-2} dr < \infty,$$

то $W(M_n, k(r))$ разрешима.

С помощью этих утверждений доказываются новые теоремы, относящиеся к различным проблемам единственности.

1. Пусть Λ — последовательность положительных чисел с $\inf|\lambda - \lambda'| = h > 0$ $(\lambda, \lambda' \in \Lambda, \lambda \neq \lambda')$.

Полоким $\lambda(r) = \Sigma_{\lambda < r} \lambda^{-1}$ $(\lambda \in \Lambda)$, $\Omega_\Lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (z; |z - \lambda| \geqslant h/4)$.

Мероморфная в полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > 0$ функция $f(z)$ с нулями, принадлежащими Λ_1, и полюсами из Λ_2 и такая, что $|f(z)| < M_n$, $n = [\mathrm{Re}(z)]$, $z \in \Omega_{\Lambda_2}$, существует тогда и только тогда, когда $W(M_n, \lambda_1(r) - \lambda_2(r))$ разрешима.

2 (Единственность проблемы моментов Стилтьеса). Для существования меры m на полуоси с условием

$$\int_0^\infty t^n |dm(t)| < M_n, \int_0^\infty t^\lambda dm(t) = 0 \quad (\lambda \in \Lambda)$$

необходимо и достаточно, чтобы $W(M_n, \lambda(r))$ была разрешима.

3 (Аппроксимация в смысле С. Н. Бернштейна). Пусть на $(0, \infty)$ задана такая функция $F(t)$, что $-\ln F(e^{-s})$ выпукла относительно s; последовательность $\{t^\lambda F(t)\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ слабо замкнута на $L_\infty(0, \infty)$ тогда и только тогда, когда $W(\|t^n F(t)\|_\infty, \lambda(r))$ разрешима.

4 (Обобщение квазианалитических классов функций на полуоси). Бесконечно дифференцируемая на $(0, \infty)$ функция $h(t)$ такая, что $|h^{(n)}(t)| \leqslant M_n$, $h^{(\lambda)}(0) = h(0) = 0$, $h(t) \not\equiv 0$, существует тогда и только тогда, когда $W(M_n, \lambda(r) - \ln r)$ разрешима. С. Н. Мергелян

5753. Об обобщении некоторых результатов теории распределения значений мероморфных функций. Ли Кэ-цюнь (關於有理型函數分配論的幾個定理之擴充. 李克羣), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 3, № 2, 87—100 (кит.; резюме нем.)

Для функций, мероморфных в конечной плоскости, Дингхас (Dinghas A., Math. Z., 1938, 44, 568—572) показал, что вторая основная теорема Неванлинна (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М. — Л., 1941, гл. IX) может быть получена (правда, с менее точной оценкой остаточного члена) из альфорсовой теории поверхностей наложения (Неванлинна Р. там же, гл. XIII). Автор получает аналогичный ре-

зультат для функций, мероморфных в $|z|<1$. (Эта задача была решена ранее Дюфренуа (Dufresnoy J., Ann. scient. École norm. supér., 1941, 58, 178—259). *Реф.*)

Другие результаты автора относятся к функциям, мероморфным в конечной плоскости, и обобщают известные теоремы о распределении a-точек на случай островов (над заданной областью) римановой поверхности, на которую функция $w=f(z)$ отображает $|z|<\infty$. Приведем две теоремы.

1 (Обобщение теоремы о направлениях Жюлиа). Пусть $\overline{\lim}_{r\to\infty} A(r)/\ln r=\infty$. Тогда существует такое φ_0, что при любом $\tau>0$ кусок римановой поверхности, соответствующий области $|\arg z-\varphi_0|<\tau$, может иметь конечное число островов не более чем над двумя непересекающимися областями в w-плоскости.

2 (Обобщение теоремы о направлениях Бореля). Пусть $A(r)$ имеет конечный порядок λ и пусть D_1, D_2, D_3 — непересекающиеся области в w-плоскости, $n(r;\varphi,\tau,D_\nu)$ — число островов куска римановой поверхности, соответствующего области $\{|\arg z-\varphi|<\tau, |z|<r\}$, над D_ν. Тогда существует такое φ_0, что при любом $\tau>0$ $\sum_1^3 n(r;\varphi_0,\tau,D_\nu)$ имеет порядок λ.

Аналогично обобщается теорема Мию о «кругах заполнения» («les cercles de remplissage») (Milloux H., Acta math., 1928, 52). А. А. Гольдберг

5754. Теорема о вложении конечных поверхностей наложения сферы Римана. Мори (An imbedding theorem on finite covering surfaces of the Riemann sphere. Mori Akira), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 3—4, 263—268 (англ.)

Доказывается следующая теорема. Пусть D—область на римановой поверхности F, ограниченная конечным числом жордановых кривых, $f(p)$ — однозначная аналитическая функция в $\overline{D}$ (допускаются полюсы). Тогда $\overline{D}$ можно вложить в замкнутую риманову поверхность D^* того же рода, что и D, так, что $f(p)$ может быть продолжена до функции, определенной и аналитической на D^*. Аналогичная теорема справедлива для аналитических дифференциалов $d\varphi(p)$ в $\overline{D}$. Дается приложение к теории открытых римановых поверхностей класса O_{HB}. Л. И. Волковыский

5755. К классификации симметричных фуксовых групп рода нуль. Курода (On the classification of symmetric fuchsian groups of genus zero. Kuroda Tadashi), Proc. Japan Acad., 1953, 29, № 8, 431—434 (англ.)

Отражая область D_0, ограниченную внутри $|z|<1$ круговыми дугами $\{\alpha_i\}$ $(i=0,1,2,\ldots)$, ортогональными к $|z|=1$, относительно α_0 и отождествляя соответствующие пары граничных дуг возникающей таким образом фундаментальной области фуксовой (или фуксоидальной) симметричной группы рода нуль без эллиптических преобразований, получаем некоторую открытую риманову поверхность $\hat{D}$. Пусть $\lambda(r)$ — длина максимальной дуги $|z|=r<1$ в D_0 и $l(r)$ — длина всей части $|z|=r$ в D_0. Доказывается, что если

$$\int^1 \frac{dr}{l(r)}=\infty \quad \text{или} \quad \int^1 \frac{dr}{\lambda(r)}=\infty,$$

то соответственно $\hat{D}\in O_G$ или $\hat{D}\in O_{AD}$, — критерии типа, аналогичные критериям Лаасонена и Сарио (РЖМат, 1954, 2106). Л. И. Волковыский

5756. Принцип Дирихле и некоторые неравенства теории конформного отображения. Нехари (Dirichlet's principle and some inequalities in the theory of conformal mapping. Nehari Zeev), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 167—175 (англ.)

Пусть R — риманова поверхность конечного рода; $S(z)$ — действительная однозначная функция, гармоническая на R всюду за исключением конечного числа особых точек; $D^*\subset R$ и $D\subset D^*$ — две области, ограниченные в простейшем случае аналитическими кривыми, C^* и C — их границы и $D^*\setminus D$ не содержит особых точек $S(z)$; $h(z)$ $(h^*(z))$ — однозначная гармоническая в $D(D^*)$ функция и $h(z)=p(z)+S(z)$ $(h^*(z)=p^*(z)+S(z))$, где $p(z)$ $(p^*(z))$ — функция, принимающая на C (C^*) значение нуль.

Показывается, что при указанных условиях из принципа минимума для интеграла Дирихле следует неравенство

$$\int_C h\frac{\partial p}{\partial n}\,ds\geqslant\int_{C^*} h^*\frac{\partial p^*}{\partial n}\,ds \qquad (1)$$

(теорема 1). Рассматривая ограниченные конечносвязные области D и D^*, автор устанавливает справедливость неравенства (1) и для случая, когда $p(z)=0$ на внешней границе D и принимает на других граничных кривых C_ν области D постоянные значения такие, что $h(z)$ — однозначная гармоническая в D функция, имеющая однозначную в D сопряженную гармоническую функцию (аналогично определяются $p^*(z)$, $h^*(z)$) (теорема 2). Показано также, что если $D_1,\ldots,D_n$ — непересекающиеся подобласти области D, $S_\nu(z)$ — функция, гармоническая (и однозначная) в $\overline{D\setminus D_\nu}$, $h_\nu(z)=p_\nu(z)+S_\nu(z)$ — гармоническая в D и $p_\nu(z)=0$ на границе C_ν области D_ν, $H(z)=P(z)+\sum_1^n S_\nu(z)$ — гармоническая в D функция, причем $P(z)=0$ на границе C области D, то

$$\sum_{\nu=1}^n\int_{C_\nu} h_\nu\frac{\partial p_\nu}{\partial n}ds+\sum_{\nu=1}^n\sum_{\mu\neq\nu}\int_{C_\nu} S_\mu\frac{\partial p_\nu}{\partial n}ds\geqslant\int_C H\frac{\partial P}{\partial n}\,ds$$

(теорема 3). Выбирая те или иные функции $S(z)$, автор получает как следствие этих теорем ряд неравенств и теорем, как установленных ранее другими способами, так и новых. Так, при $S(z)=\sum_1^n\alpha_\nu\ln|z-\zeta_\nu|$, $\zeta_\nu\in D$, α_ν — действительные числа, из теоремы 1 получено, что квадратичная форма $\sum\alpha_\nu\alpha_\mu h(\zeta_\nu,\zeta_\mu)$ монотонно возрастает при расширении области и при условии $\sum\alpha_\nu=0$ неположительна; случай $p(z)=\mathrm{Re}\,(\sum\alpha_\nu\cdot\partial g(z,\zeta_\nu)/\partial\zeta)$ приводит к неравенству Бергмана — Шиффера (Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М., 1953, 257). Теорема 3 дает простой способ исследования некоторых экстремальных задач для конформного отображения непересекающихся областей. В частности, автором получены точная оценка $|f'(z_0)g'(w_0)|$, $|z_0|<1$, $|w_0|<1$, для функций, однолистно отображающих $|z|<1$ на непересекающиеся, принадлежащие единичному кругу области (ранее в эквивалентной форме установленная референтом, см. Докл. АН СССР, 1950, 73, № 5, 881), и другие оценки.

В заключение с помощью одной топологической леммы дано тем же методом решение задачи о максимуме модуля двусвязной области для класса двусвязных областей с фиксированной внешней граничной кривой C, не содержащих две внутренние для C точки.

П. П. Куфарев

5757. Теория мероморфных функций на открытой римановой поверхности с нулевой границей. Цуджи (Theory of meromorphic functions on an open Riemann surface with null boundary. Tsuji Masatsugu), Nagoya Math. J., 1953, 6, October, 237—150 (англ.

Ранее автор (Japan. J. Math., 1944, 19, 139—154) изучал распределение значений функции $f(z)$, мероморфной в z-плоскости с выброшенным замкнутым множеством логарифмической емкости нуль, причем исчерпание z-плоскости велось по линиям уровня потенциала Эванса, построенного в области существования $f(z)$, т. е. по линиям уровня функции, гармонической (за исключением одной точки z_0, где она ведет себя как $\ln|z-z_0|$) в этой области и стремящейся к $+\infty$, когда z стремится к границе области (см. также Kuroda T., Tôhoku Math. J., 1951, 3, 257—269). В рецензируемой статье автор переносит эти результаты на случай мероморфной функции, заданной на открытой римановой поверхности F с нулевой границей. Поскольку вопрос о существовании потенциала Эванса на таких римановых поверхностях остается открытым, исчерпание поверхности F строится при помощи последовательности компактных римановых поверхностей $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n \to F$. Для $F_n - \overline{F}_0$ строится гармоническая мера $u_n(z)$, равная 1 на границе $\overline{F}_n$. Линии уровня $u_n(z)$ заменяют линии уровня потенциала Эванса в случае плоской области. При этом в $F_{n+1} - \overline{F}_0$ рассматриваются лишь линии уровня $|u_{n+1}(z)| = r < r_{n+1}$ такие, что область, где $1 > |u_{n+1}| > r_{n+1}$, содержит область $F_n - \overline{F}_0$.

Автор строит для $F_n - \overline{F}_0$ неванлинновские характеристические функции и переносит на рассматриваемый случай первую основную теорему. Пусть Φ — риманова поверхность, на которую функция $w = f(z)$ отображает поверхность F. Показывается, что множество точек w, над которыми лежит меньшее, чем максимальное, число листов Φ, имеет логарифмическую емкость нуль, а также, что Φ регулярно исчерпаема в смысле Альфорса и обладает свойством Гросса (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941, п. п. 240, 314). В качестве приложения полученных результатов изучается вопрос о емкости границы специальным образом построенных поверхностей наложения (бесконечного рода) римановых поверхностей алгебраических функций рода $\geqslant 2$. А. А. Гольдберг

5758. **О поверхностях наложения замкнутой римановой поверхности рода $p \geqslant 2$.** Цудзи (On covering surfaces of a closed Riemann surface of genus $p \geqslant 2$. Tsuji Masatsugu), 東北數學雜誌(Тохоку сугаку дзасси, Tôhoku Math. J.), 1953, 5, № 2, 185—188 (англ.)

Пусть F — замкнутая риманова поверхность рода $p \geqslant 2$, C_i, C_i' $(i = 1, 2, \ldots, p)$ — система попарно сопряженных циклических сечений, l_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ — дуги на F без общих точек, соединяющие точки z_i, общие для C_i, C_i', с некоторой точкой F. Склеивая бесконечное число экземпляров F с разрезами соответственно вдоль

$$C_i\ (i = 1, 2, \ldots, p);\ C_i\ (i = 1, 2, \ldots, q;\ 1 \leqslant q \leqslant p);$$

$$C_i\ (i = 1, 2, \ldots, q),\ C_{q+j},\ C'_{q+j},\ l_{q+j}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, r;\ 1 \leqslant q+r \leqslant p),$$

автор получает для F соответственно поверхности наложения $F^{(\infty)}$, $F^{(\infty)}_{(q)}$, $F^{(\infty)}_{(q,\,r)}$. Ранее автором было доказано (РЖМат, 1955, 2637; 575):

1) Функция Грина $G(z, z_0)$ для $F^{(\infty)}$ стремится к нулю, когда z стремится к границе $F^{(\infty)}$.

2) $F^{(\infty)}_{(1)}$ имеет нулевую границу; $F^{(\infty)}_{(q)}$ при $q \geqslant 2$ имеет положительную границу и существует непостоянная ограниченная гармоническая функция на $F^{(\infty)}_{(q)}$ с конечным интегралом Дирихле.

В реферируемой работе доказывается, что результат 1) сохраняется для поверхностей $F^{(\infty)}_{(q)}$, а результат 2) справедлив для поверхностей $F^{(\infty)}_{(q,\,r)}$ в следующей форме: $F^{(\infty)}_{(1,0)}$ и $F^{(\infty)}_{(0,1)}$ имеют нулевую границу; $F^{(\infty)}_{(q,\,r)}$, $q+r \geqslant 2$, имеет положительную границу и существует непостоянная ограниченная гармоническая функция на $F^{(\infty)}_{(q,r)}$ с конечным интегралом Дирихле. И. Н. Песин

5759. **О граничных элементах, возникающих при деформациях римановых поверхностей, разветвленных над конечным числом точек.** Зейберт (Über die bei Deformationen Riemannscher Flächen mit endlich vielen Windungssorten entstehenden Randstellen. Seibert Peter), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 389—400 (нем.)

Пусть F_0 — класс римановых поверхностей (РП), точки ветвления которых расположены над конечным числом точек $a_1, \ldots, a_n$, $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$. Пусть РП $\tilde{W}_0 \in F_0$. Элементарным областям E_i^j комплекса отрезков S РП $\tilde{W}_0$ (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941, гл. XI, § 2) поставим в соответствие действительные числа $\alpha_i^{(j)}$, $0 \leqslant \alpha_i^{(j)} \leqslant 1$, причем $\alpha_i^{(j)} = 0$ только в том случае, если E_i^j соответствует логарифмической точке ветвления, и $\alpha_i^{(i)}$ не могут одновременно равняться нулю для двух соседних (по комплексу отрезков) лог. точек ветвления. Каждому узлу S поставим в соответствие многоугольник в w-плоскости с вершинами $\alpha_1^{(j_1)}a_1, \ldots, \alpha_n^{(j_n)}a_n$, если $E_i^{j_i}$ — элементарные области, граничащие с этим узлом. У таких многоугольников отождествляем стороны, соответствующие одному и тому же отрезку S. О полученной таким образом РП $\tilde{W}_1$ говорят, что она образована деформацией $\tilde{W}_0$. Поверхности $\tilde{W}_0$ образуют класс F_1. Автор изучает трансцендентные критические точки (граничные элементы), которые могут иметь РП класса F_1.

Полулистам $\tilde{W}_0$ ($|w| < 1$ и $|w| > 1$) взаимно однозначно соответствуют полулисты $\tilde{W}_1$, ограниченные описанными выше многоугольниками. $\tilde{W}_1$ имеет такой же комплекс S, как и $\tilde{W}_0$. Чтобы характеризовать структуру $\tilde{W}_1$, автор в каждой элементарной области комплекса S помещает точку — узел ветвления и соединяет ее отрезком с каждым узлом на границе этой области, соответствующим полулисту, полученному деформацией $|w| < 1$. Полученная система отрезков называется комплексом T. Отрезкам комплекса T ставятся во взаимно однозначное соответствие отрезки $\arg w = \arg a_i$, $0 < |w| < \alpha_i^{(j)}$, на $\tilde{W}_1$. При помощи этого соответствия на T переносится метрика из w-плоскости и вводятся комплексы T_ε, т. е. части комплекса T, которым соответствуют $|w| < \varepsilon$. Связные части T_ε обозначим T'_ε; если последовательность $T'_{\varepsilon_1} \supseteq T'_{\varepsilon_2} \supseteq \ldots$ бесконечна, то она определяет T-систему. Часть комплекса T называется комплексом $L^{(a)}$, если на $\tilde{W}_1$ ей соответствует путь, ведущий в лог. точку ветвления над a. Доказывается ряд теорем позволяющих устанавливать характер критической точки над 0 у $\tilde{W}_1 \in F_1$ (прямо или косвенно критическая точка, и более детальная классификация по Ульриху (Ullrich E., Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1936, 46, 232—2 4)), если известен комплекс T. В конце статьи выделяются три наиболее важных класса деформаций. 1. M-деформации: для лог.

точек ветвления $\alpha_i^{(j)} \geqslant \text{const} > 0$ (например, РП цилиндрической функции $J_0(z)$ получается из РП $\sin z$ M-деформацией). 2. U-деформации первого рода: существует по крайней мере одна лог. точка ветвления над 0 и каждой T-системе принадлежит хотя бы один комплекс $L^{(0)}$, содержащийся во всех T'_{ε_i}, определяющих эту систему. При этой деформации может произойти «слияние» нескольких лог. точек ветвления в одну критическую точку (например, у поверхности гамма-функции две лог. точки над 0 сливаются в одну критическую точку). 3. U-деформации второго рода: каждый T'_ε-комплекс содержит комплекс L, но не существует комплекса L, принадлежащего всем T'_ε некоторой T-системы.

Отметим, что автор определяет трансцендентные критические точки РП с помощью системы ε-окрестностей, аналогично определению простого конца по Каратеодори. Это определение удобнее при изучении РП, чем определение Иверсена (Неванлинна Р., цит. выше, гл. XI, § 1).

В работе много неточностей и опечаток. Так, в § 3 автор не учитывает, что у построенного им прямолинейного многоугольника возможны самопересечения; в § 6, пример 2, обозначения не согласованы с фиг. 4: должно быть $a_{1,2k}$, $a_{1,-2k}$, $a_{1,2k+1}$, $m > 1$, вместо $a_{0,2k}$, $a_{0,-2k}$, $a_{0,2k+1}$, $m > 0$. А. А. Гольдберг

5760. Об интегрировании уравнения Пуассона на открытых римановых поверхностях. Мюрберг (Über die Integration der Poissonschen Gleichung auf offenen Riemannschen Flächen. Myrberg Lauri), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1953, sar. AI, № 161, 1—10 (нем.)

Доказывается следующая теорема. Пусть на открытой римановой поверхности F с локальными параметрами $z_n = x_n + iy_n$ задана действительная функция $\rho(z)$, непрерывная вместе со своими первыми частными производными и изменяющаяся при замене $z_h \to z_k$ по формуле $\rho(z_h) = \rho(z_k) |\operatorname{grad} x_k(x_h, y_h)|^2$. Тогда уравнение Пуассона $\Delta u = -\rho(z)$ разрешимо и решение определено с точностью до гармонической функции как слагаемого. Для обеспечения сходимости соответствующего потенциала $u(Q) = (2\pi)^{-1} \iint_F G(P, Q) \rho(P) d\sigma$, где ядро G есть либо функция Грина поверхности F, либо получается из функций $g_n - \gamma_n$ исчерпания $F_n \nearrow F$ (g_n — функция Грина для F_n, γ_n — постоянная Робэна), поверхность F разбивается на многоугольники M_n, лежащие в параметрических кругах, и из G вычитаются в M_n подходящие гармонические функции. Это приводит к потенциалу вида

$$u_0(Q) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{M_n} \left[G(P, Q) - \sum_{k=0}^{p_n} \left(a_h^k \cos k\varphi + b_h^k \sin k\varphi\right) \left(\frac{r}{r_n}\right)^k \right] \rho(P) d\sigma$$

(M_n лежит в части $|z_h| < r_n < 1$ параметрического круга) с изолированными особенностями, которые затем уничтожаются вычитанием гармонической функции h_0 с теми же особенностями; тогда $u = u_0 - h_0 + h$ (h — гармоническая функция на F).

Указывается приложение к векторным полям на F. Если на F задан инвариантный дифференциал $V_x dx + V_y dy$, где V_x, V_y — компоненты вектора $\mathbf{V}$ — непрерывны вместе со своими первыми частными производными, то возможно разложение $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$ с свойствами:

$$\operatorname{rot} \mathbf{V}_1 = 0, \ \operatorname{div} \mathbf{V}_1 = \operatorname{div} \mathbf{V}, \ \mathbf{V}_1 = -\operatorname{grad} u;$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_2 = 0, \ \operatorname{rot} \mathbf{V}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{V}, \ \mathbf{V}_2 = \operatorname{rot} \Phi, \ \operatorname{div} \Phi = 0;$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_3 = \operatorname{rot} \mathbf{V}_3 = 0, \ \mathbf{V}_3 = -\operatorname{grad} h,$$

где u — однозначный скалярный потенциал, Φ — однозначный векторный потенциал и h — многозначный гармонический (абелев) потенциал. Л. И. Волковыский

5761. Теория комплексных функций на «supra-corpus» n-мерных гиперкомплексных чисел. I. Така (A complex function theory on a «supra-corpus» n-dimensional hypercomplex numbers. I. Taka Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1953, № 2, 131—224 (англ.)

Строится общая теория дифференцируемых однозначных и многозначных гиперкомплексных функций одной гиперкомплексной переменной ζ, значения которых предполагаются, в основном, принадлежащими к некоторому коммутативному кольцу $\mathfrak{R} = \mathfrak{K} + \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{K}$ — поле действительных или обыкновенных комплексных чисел, $+$ есть знак прямой суммы, $\mathfrak{N}$ — идеал, образованный делителями нуля рассматриваемой системы гиперкомплексных чисел. Кольцо $\mathfrak{R}$ и называется «supra-corpus» по отношению к $\mathfrak{K}$.

Введя понятие абсолютного значения гиперкомплексного числа, автор строит полную теорию пределов гиперкомплексных переменных, степенных рядов по степеням $\zeta - \zeta_0$ с точным указанием области сходимости рядов и теорию аналитических функций от ζ, определяемых с помощью таких рядов, вместе с аналогами интегральной теоремы Коши, теорем Абеля и Вейерштрасса о степенных рядах и других основных теорем теории аналитических функций обыкновенного комплексного переменного. (Однако автор не определяет понятия аналитического продолжения степенных рядов и полной аналитической функции в смысле Вейерштрасса. *Реф.*)

Выводятся условия независимости производной гиперкомплексной функции $f(\zeta)$ от направления дифференцирования. Даются теоремы дифференцирования и формула производной обратной функции.

Подробно изучаются однозначные и многозначные элементарные аналитические функции от ζ. В частности исследуются периодичность тригонометрических и многозначность логарифмических функций.

Всякое гиперкомплексное число $\zeta = \sum_1^n e_p x^p$ ($n \geqslant 2$, где e_p — гиперкомплексные единицы алгебры (ассоциативной и с главной единицей), интерпретируется как вектор $\overrightarrow{OP}$, где точка P имеет параллельные координаты $x^1, \ldots, x^n$ в аффинном n-мерном пространстве, отнесенном к системе параллельных координат x. Норма $N(\zeta)$ числа ζ при законе умножения единиц $e_q e_j = \sum_{p=1}^n a_{q,e_p}^p$ определяется так: $N(\zeta) = |n_{ts}|_1^n$, где $n_{ts} = a_{sq}^t x_q \equiv \sum_{q=1}^n a_{sq}^t x^q$ (как обычно в тензорном исчислении). Доказывается, что равенство $N(\zeta) = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы ζ было делителем нуля. Число, обратное делителю нуля, называется бесконечным множителем и обозначается ∞. Абсолютное значение $|\zeta|$ числа ζ, если взять случай трехмерного пространства (x, y, z), определяется следующим образом, если e_1 — главная единица, обозначаемая автором 1, и если

$$\zeta = x + e_2 y + e_3 z, \ e_2^2 = \alpha e_2 + \beta e_3 + M, \ e_3^2 = \gamma e_2 + \delta e_3 + L$$

$$e_2 e_3 = \lambda e_2 + \mu e_3 + E,$$

то полагаем (при условии $\beta, \gamma \neq 0$):

$$|\zeta| = j_1|x + t_1y + \tau_1z| + j_2|x + t_2y + \tau_2z| + j_3|x + t_3y + \tau_3z|,$$

где j_1, j_2, j_3 — идемпотентные трехмерные гиперкомплексные единицы, для которых выполняются условия:

$$j_p^2 = j_p,\ j_pj_q = 0\ (p \neq q;\ p, q = 1, 2, 3), \sum_1^3 j_p = 1, \quad (1)$$

а t_p и τ_p — такие обыкновенные комплексные числа, что 1) $t_p^2 = \alpha t_p + \beta\tau_p + M$, $\tau_p^2 = \gamma t_p + \delta\tau_p + L$, $t_p\tau_p = \lambda t_p + \mu\tau_p + E$; 2) тройки $(1, t_p, \tau_p)$ $(p = 1, 2, 3)$ линейно независимы.

Таким образом, $|\zeta|$ имеет три компоненты в случае $n = 3$ (аналогично определяется $|\zeta|$ для любого n).

Каждая из единиц j_1, j_2, j_3 рассматривается как любое число из тройки действительных чисел (0, 0, 1), без указания, однако, какое именно из этих чисел берется при условии, чтобы равенства (1) выполнялись. (Автор в сущности, считает каждую j_p действительной переменной, принимающей значения 0, 0, 1 при условиях (1), и независимую от координат x, y и z, а также высказывает аналогичную точку зрения на любую гиперкомплексную единицу, которой приписывает обыкновенные комплексные значения при условии соблюдения закона умножения таких единиц, характерного для данной системы гиперкомплексных чисел. *Реф.*).

Замечена опечатка: на стр. 141 в формуле для t_i^2 напечатано βt_i вместо $\beta\tau_i$. В. С. Федоров

5762. Об одном классе функций, имеющем отношение к гармоническим функциям. Шеффер (A class of functions related to harmonic functions. Sheffer I. M.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 3, 479—489 (англ.)

Доказывается, что существуют негармонические функции такие, что для них и для всех их частных производных теорема Гаусса о среднем верна в точках некоторой части D' области D, $D' \neq D$, по отношению к окружностям некоторого постоянного радиуса a, лежащим внутри D. Сначала доказывается существование функций, обладающих указанным свойством в одной точке (ξ, η).

В плоскости фиксируется круг K с центром (ξ, η) и радиусом a и рассматривается два класса функций действительных переменных x, y: а) класс P функций, для которых разложения в ряд Тейлора самих функций и их частных производных

$$u_{p,q}(x, y) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{1}{r!\,s!} u_{p+r,\,q+s}(x-\xi)^r (y-\eta)^s \ (p, q = 0, 1, \ldots),$$

$$u_{i,j}(x, y) = \frac{\partial^{i+j} u(x, y)}{\partial x^i\, \partial y^j},\ u_{i,j} = u_{i,j}(\xi, \eta),$$

равномерно сходятся в замкнутом круге $\overline{K}$; б) класс Q функций, принадлежащих P и обладающих свойством

$$u_{p,q}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{p,q}(\xi + a\cos t,\ \eta + a\sin t)\, dt$$
$$(p, q = 0, 1, \ldots).$$

Рассматривается дифференциальный оператор

$$\Omega(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (k!)^{-2} (a^2/4)^k \Delta^k u(x, y), \quad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа, а Δ^k — оператор Δ, примененный k раз. Вводится вспомогательный класс функций W: функция $u \in W$, если в окрестности точки (ξ, η) она может быть разложена в ряд Тейлора и для получения разложения функции $\Omega(u)$ можно в правую часть равенства (1) вместо u подставить ее разложение и произвести затем надлежащую перегруппировку членов. Доказывается, что $u \in W$, если разложение ее в ряд Тейлора в точке (ξ, η) абсолютно сходится для $x = \xi + c$, $y = \eta + c$ при некотором $c > a$.

Устанавливается следующая основная теорема. Пусть $u \in P \cap W$. Тогда $u \in Q$ тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки (ξ, η) $u(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных бесконечного порядка $\Omega[u(x, y)] = 0$.

Она позволяет автору сконструировать примеры негармонических функций, принадлежащих классу Q.

Устанавливаются необходимые и достаточные условия, чтобы функция $u(x, y) \in P$, удовлетворяющая одному из уравнений:

$$\Delta u + cu = 0\ (c \neq 0),$$

$$\Delta^2 u = \alpha u + \beta\Delta u\ (\alpha, \beta \text{ — постоянные}),$$

принадлежала классу Q.

Даются также необходимые и достаточные условия, чтобы функции $A_j(x, y) \in P$, $j = 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющие системе уравнений: $\Delta A_j(x, y) = \alpha_{j_1}A_1 + \ldots + \alpha_{j_k}A_k$, $j = 1, \ldots, k$, принадлежали классу Q.

Показывается, что если свойство б) имеет место в одной точке, то оно при известных условиях имеет место и в некоторой окрестности этой точки. Для перехода от одной точки (ξ, η) к подобласти D' остается совершить процесс, аналогичный процессу аналитического продолжения.

В заключение отмечается, что изложенное для двух переменных справедливо для любого числа n переменных, включая $n = 1$. М. Г. Хапланов

5763. Определение наиболее общего вида парааналитических функций двух измерений. Фреше (Determinado de la plej generalaj planaj paraanalitikaj funkcioj. Fréchet Maurice), Ann. mat. pura ed appl., 1953, 35, 255—268 (эсперанто; резюме франц.)

Рассматриваются переменные двумерные векторы

$$v = x_1e_1 + x_2e_2,\ V = X_1e_1' + X_2e_2'$$

со следующим законом (R) умножения постоянных единичных векторов e_j и e_k' $(j, k = 1, 2)$:

$$e_k'e_j = \sum_{h=1,2} u_{kjh}\, e_h',\ u_{kjh} - \text{const}\ (R)$$

Автор называет V парааналитической функцией (слева и в широком смысле этого слова) от v для $v = v_0$ по отношению к данному закону (R), если имеется такая окрестность v_0, в которой

1) X_1, X_2 — дифференцируемые функции от x_1, x_2;

2) существуют функции $L_1 \equiv L_1(x_1, x_2)$, $L_2 \equiv L_2(x_1, x_2)$, для которых в этой окрестности

$$dX_1e_1' + dX_2e_2' = (L_1e_1' + L_2e_2')(dx_1e_1 + dx_2e_2),$$

где L_1, L_2 не зависят от dx_1 и dx_2 и умножение совершается по закону (R), т. е.

$$dX_h = \sum_j \left[\sum_k L_k u_{kjh}\right] dx_j.$$

Доказывается, что линейные преобразования векторов V и v

$$X_h = \sum_l \nu_{hl} Y_l,\ x_j = \sum_m \rho_{jm} y_m\ (h, j, l, m = 1, 2)$$

с постоянными коэффициентами и с определителями, отличными от нуля, переводят парааналитическую функцию $X_1e_1' + X_2e_2'$ от $x_1e_1 + x_2e_2$ в парааналитическую функцию $Y_1f_1' + Y_2f_2'$ от $y_1f_1 + y_2f_2$, где

$$f_l' = \sum_h \nu_{hl} e_h',\ f_m = \sum_j \rho_{jm} e_j,\ e_k' = \sum_l \xi_{lk} f_l',$$
$$f_l' f_m = \sum_s v_{lms} f_s',\ v_{lms} = \sum_{h,j,k} \nu_{hl} \rho_{jm} \xi_{sk} u_{hjk}.$$
$$(l, h, m, j = 1,2).$$

Пользуясь указанными линейными преобразованиями, автор приводит любую парааналитическую функцию двух измерений к одному из следующих пяти канонических видов:

1) $X_1 = X_1(x_1)$, $X_2 = X_2(x_2)$; 2) $X_1 + iX_2$ — аналитическая функция от $x_1 + ix_2$; 3) $X_1 = A(x_1)$, $X_2 = x_2 A'(x_1) + B(x_1)$; 4) $X_1 = X_1(x_1)$, $X_2 = X_2(x_1)$; 5) $X_1 = \text{const}$.

В. С. Федоров

5764. **О представлении плюрисубгармонических функций посредством потенциала.** Лелон (Sur la représentation d'une fonction plurisousharmonique à partir d'un potentiel. Lelong Pierre), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 14, 691—693 (франц.)

Приводятся (без доказательства) интегральные представления функций $V(z) = V(z_1, \ldots, z_n)$ плюрисубгармонических во всем пространстве $C^n(z_k)$, аналогичные общей формуле Ф. Риса для субгармонических функций.

Пусть $B(R)$ — гиперсфера радиуса R с центром в O, $\lambda(\varphi, O, R)$ — среднее значение некоторой функции φ на $B(R)$, $\nu(R) = \partial\lambda(V, O, R) / \partial \ln R$ и $h(a, z) = \left[\sum_1^n (a_i - z_i)(\bar{a}_i - \bar{z}_i)\right]^{1-n}$ — ядро потенциалов.

Теорема 1. Если $V^+ = \sup(V, 0)$ и $\lambda(V^+, O, R) = o(R)$, то

$$V(z) = \lim_{R\to\infty}\left[\lambda(V, O, R) + (2n-2)^{-1}\nu(R) - \right.$$
$$\left. - \int_{B(R)} d\mu(a)\, h(a, z)\right],$$

где $d\mu(a)$ — положительная мера Радона.

Теорема 2. Если $V(z)$ удовлетворяет условию теоремы 1 и, кроме того,

$$\int_1^\infty t^{-1} d\nu(t) < \infty, \quad V(0) > -\infty,$$

то

$$V(z) = V(0) - \int_{C^n} d\mu(a)\, h_0(a, z),$$

где $h_0(a, z) = h(a, z) - h(0, z)$.

В частности, если $F(z) = F(z_1, \ldots, z_n)$ — целая и $V = \ln|F|$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то

$$\ln|F(z)| =$$
$$= \ln|F(0)| - s_{n-1}^{-1}\int_{C^n} d\sigma(a)\, h_0(a, z),\ s_{n-1} = 2\pi_{n-1}/(n-2)!;$$

$$\frac{1}{F}\sum_1^n F'_{z_i} dz_i = \tau_{n-1}^{-1}\int_{C^n} d\sigma(a)\sum_1^n (\bar{z}_i - \bar{a}_i) dz_i / |az|^{2n}$$
$$\tau_n = \pi^n / n!$$

А. В. Бицадзе

5765 Д. **Некоторые экстремальные задачи специальных классов аналитических функций.** Дундученко Л. Е. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1955

См. также: 5552, 5677, 5730 К, 5776, 5777, 5811, 5812, 5813, 5817, 5818, 5922

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5766. **Об интегрировании системы линейных уравнений второго порядка по способу А. М. Ляпунова** Дубошин Г. Н., Тр. Гос. астроном. ин-та им. Штернберга, 1954, **24**, 109—121

Рассматривается система

$$\frac{d^2x_s}{dt^2} = \sum_{i=1}^n q_{si}(t)\frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=1}^n p_{si}(t)\, x_i,$$
$$s = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

где $q_{si}(t)$, $p_{si}(t)$ — непрерывные функции $t \in [t_0, T]$. При помощи метода вспомогательного параметра строится решение в виде некоторых рядов. Этим же методом строится частное решение системы

$$\frac{d^2x_s}{dt^2} = \sum_{i=1}^n q_{si}(t)\frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=1}^n p_{si}(t)\, x_i + R_s(t),$$
$$s = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

где $q_{si}(t)$, $p_{si}(t)$, $R_s(t)$ — непрерывные функции $t \in [t_0, T]$.

Приводятся вычислительные формулы. В. И Зубов

5767. **Об одной теореме разделения линейной системы дифференциальных уравнений с почти периодическими коэфициентами.** Ляшенко Н. Я., Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 1, 47—55.

Рассматривается тот же вопрос, что и в предыдущей заметке автора (РЖМат, 1955, 2186), с тем только отличием, что матрицы коэффициентов уравнений в реферируемой заметке состоят из почти периодических функций.

В. В. Немыцкий

5768. **О существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений некоторого класса.** Петропавловская Р. В., Матем. сб., 1955, **36**, № 1, 149—162

Дана система уравнений

$$dx_i / dt = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)\,\Lambda_i(t) / B_i(x_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

где f_i непрерывны в области D: $0 \leqslant t \leqslant a$, $|x_i| \leqslant b$; Λ_i непрерывны при $0 < t \leqslant a$, B_i — при $|x_i| \leqslant b$. Пусть выполнены условия: $0 < m \leqslant |f_i| \leqslant M$ в области D;

$$rt^{\gamma_i} \leqslant \Lambda_i(t) \leqslant Rt^{\gamma_i}, \text{ где } r > 0,\ \gamma_i > -1;$$

$$l|x|^{\beta_i} \leqslant B_i(x) \leqslant L|x|^{\beta_i}, \text{ где } l > 0,\ \beta_i \geqslant 0;$$

существуют такие $N > 0$, $0 \leqslant \alpha < 1$, что если x_i' того же знака, как x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$|f_i(t, x_i') - f_i(t, x_i'')| \leqslant N \sum_{i=1}^n \frac{|x_i' - x_i''|}{\min(|x_i'|^\alpha,\ |x_i|^\alpha)}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ (последнее условие выполнено, если в D $|\partial f_i / \partial x_k| \leqslant N|x_k|^{-\alpha}$). Тогда существует единственное решение (1) с начальными условиями $x_i(0) = 0$.

Если в (1) $B_i(x_i) \equiv 1$, $\gamma_i \geqslant 0$, то сходится процесс последовательных приближений Пикара.

А. Ф. Филиппов

5769. О решениях системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Хаяси (On the solutions of the system of ordinary differential equations. Hayashi Kyuzo), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1953, **A28**, № 1, 19—25 (англ.)

Рассматривается уравнение $y' = f(x,y)$, где $f(x,y)$ измерима по x и непрерывна по y в прямоугольнике, $|f(x,y)| \leqslant M(x)$, $M(x)$ суммируема. Кроме доказательства теоремы существования Каратеодори, дается новое простое доказательство теорем Кнезера и Фукухара. Автор не указывает, что эти теоремы были (другим методом) доказаны почти при тех же предположениях М. Ф. Бокштейном (Уч. зап. МГУ, 1939, № 15, 3—70). Кроме того, результаты статьи являются частными случаями общих теорем референта (РЖМат, 1953, 713).

Е. Е. Викторовский

5770. О дифференциальном уравнении типа Каратеодори. Хаяси (On the differential equation of Caratheodory's type. Hayashi Kyuzo), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1953, **A28**, № 2, 129—132 (англ.)

Доказывается, что для любой $f(x,y)$, измеримой по x и суммируемой по y в полосе $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < +\infty$ ($|f(x,y)| \leqslant k(x)$, $k(x)$ суммируема на $[a,b]$), можно выбрать измеримое множество E, $\operatorname{mes} E = b - a$, такое, что

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t, \varphi(t))\,dt = f(x, \varphi(x)) \quad \text{на } E$$

для любой непрерывной функции $\varphi(x)$.

Отсюда в качестве следствия получается, что для уравнения

$$y' = f(x,y), \tag{1}$$

где $f(x,y)$ удовлетворяет указанным условиям, можно выбрать $E \subset [a,b]$, $\operatorname{mes} E = b - a$, так, что всякое решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x f(t, \varphi(t))\,dt$$

удовлетворяет на E уравнению (1). Указывается, что результат может быть распространен на системы уравнений. Как указывает автор, этот результат ранее был получен Скорца-Драгони (Scorza Dragoni, Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1952, **12**, 55—61)

Е. Е. Викторовский

5771. Об одном обобщении теоремы Кнезера. Хукухара (Sur une généralisation d'un théorème de Kneser. Hukuhara Masuo), Proc. Japan Acad., 1953, **29**, 154—155 (франц.)

Рассматривается дифференциальное неравенство

$$|y' - f(x,y)| \leqslant F(x,y), \tag{1}$$

где x и F действительны, а y и f — действительные векторы; (1) рассматривается на точечном множестве S: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $|y| < \infty$. Доказывается, что если A — континуум в S, то семейство всех тех решений y, которые пересекают A, является континуумом в пространстве непрерывных функций C. Топология в C не определяется.

F. A. Ficken

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 7, 623.

5772. Критерии единственности для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Франкини (Criteri d'unicità per gli integrali di un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Franchini Lucia), Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N. S.), 1953, 2, 53—69 (итал.)

Даются критерии единственности для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. При $n = 1$ они обобщают критерии Кафиеро (Cafiero, Giorn. mat. Battaglini, 1948, 2, 10—41), Цвирнера (Zwirner. Rend. sem. mat. Univ. Padova, 1940, **11**, 90—96) и др.

J. M. Thomas

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 7, 623

5773. Обобщение теоремы Лопиталя, связанное с проблемой продолжения решений дифференциальных уравнений. Важевский (Une modification du théorème de l'Hôpital liée au problème du prolongement des intégrales des équations différentielles. Ważewski T.), Ann. polon. math., 1954, **1**, № 1, 1—12 (франц.)

Обобщается правило Лопиталя: Пусть $F(x)$ — непрерывная на открытом интервале $\Delta = (a;b)$ функция (b — конечное или бесконечное число), принимающая значения в банаховом пространстве B; $g(x)$ — непрерывная монотонная действительная функция, определенная на Δ, правые производные $F'_+(x)$ и $g'_+(x) \neq 0$ существуют в $\Delta - Z$, где Z — не более, чем счетное множество; $\lim_{x \to b} g(x) = 0$; $\lim_{x \to b} \inf |F(x)| = 0$; для всякой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in \Delta - Z$, $x_n \to b$, $F(x_n) \to 0$, справедливо: $F'_+(x_n) / g'_+(x_n) \to k$, где $k \in B$ не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$.

Тогда:

$$\lim_{x \to b} F(x) = 0;\ \lim_{x \to b} \frac{F'_+(x)}{g'_+(x)} = k\ (x \in \Delta - Z);$$

$$\lim_{x \to b} \frac{F(x)}{g(x)} = k.$$

Далее автор применяет этот результат для доказательства теоремы: Пусть $y' = G(x,y)$, где x — действительное число, $y \in B$. Рассмотрим $\Psi(x)$ — решение уравнения, определенное на Δ. Пусть функция $G(x,y)$ непрерывна в точке $x = b$, $y = P$; существует такая последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in \Delta$, $x_n \to b$, что $\Psi(x_n) \to P$. Тогда $\lim_{x \to b} \Psi(x) = P$. Полагая $\Psi(b) = P$, автор доказывает, что $\Psi'(b) = G(b; \Psi(b))$.

В частности, если B — прямая, получается продолжение решения обыкновенного дифференциального уравнения на полуинтервал (a,b).

Ю. С. Очан

5774. Связь между областью устойчивости и областью равномерной аналитичности по начальным данным решений систем дифференциальных уравнений. Плисс В. А., Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 11, 19—32

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dz_k}{dt} = \sum_{m_1 + \ldots + m_n > 0} P_k^{(m_1, \ldots, m_n)}(t)\, z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где правые части — ряды с непрерывными ограниченными коэффициентами $P_k(t)$, сходящиеся равномерно в любой ограниченной области комплексных переменных z_k при всех вещественных $t \geqslant 0$. Исследуется вопрос, поставленный Н. П. Еругиным (Прикл. матем. и механ., 1953, **17**, № 4, 389—400) о связи между областью устойчивости решения $z_k = 0$ и областью сходимости рядов Ляпунова

$$z_k = f_k(c_1,\dots,c_n,t) = \sum_{m_1+\dots+m_n>1} L_k^{(m_1,\dots,m_n)}(t)\, c_1^{m_1}\dots c_n^{m_n}, \qquad (2)$$

дающих разложение решений по начальным данным. Исследование опирается на теорему А. М. Ляпунова о сходимости рядов (2) (Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., Гостехиздат, 1950).

Если E_T — область пространства $\{z_k\}$, содержащая начало координат и такая, что решения $z_k = f_k(c_1,\dots,c_n,t)$ продолжимы на интервал $0 \leqslant t < T < \infty$, когда значения $c_1,\dots,c_n$ лежат в E_T, а в окрестности любой точки границы E_T начинаются траектории, не продолжимые на этот интервал, то E_T совпадает с областью D_T, в которой все функции $f_k(c_1,\dots,c_n,t)$ аналитичны по $c_1,\dots,c_n$ при каждом t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Функция $F(z_1,\dots,z_n,t)$ называется равномерно аналитической в области S при $t \geqslant 0$, если в окрестности каждой точки $z_1^0,\dots,z_n^0$ из S она разлагается в равномерно сходящийся ряд по степеням $z_k - z_k^0$. Если решение $z_k = 0$ равномерно асимптотически устойчиво, то область устойчивости $\bar{D}$ совпадает с областью S, в которой все функции $f_k(c_1,\dots,c_n,t)$ равномерно аналитичны при $t \geqslant 0$. Ряды (2) сходятся равномерно внутри наибольшей полукруговой области P с центром в начале координат, лежащей в области устойчивости, причем в любой внешней для P точке хотя бы один из рядов не сходится равномерно при $t \geqslant 0$. Если все корни характеристического уравнения системы

$$dz_k/dt = p_{k1}z_1 + \dots + p_{kn}z_n + Z_k(z_1,\dots,z_n),$$

(где Z_k — ряды без свободных и линейных членов) имеют отрицательные действительные части, то в комплексном фазовом пространстве область асимптотической устойчивости не может быть ограниченной.

Подчеркивается невозможность непосредственного приложения теорем в вещественном фазовом пространстве.

Н. Н. Красовский

5775. Об асимптотических решениях обыкновенных линейных дифференциальных уравнений третьего порядка в области, содержащей точку разветвления. Л а н г е р (On the asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the third order in a region containing a turning point. L a n g e r R u d o l p h E r n e s t), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 131 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$d^3y/dz^3 + \sum_{j=1}^{3} \lambda^j p_j(z,\lambda)\, d^{3-j}y/dz^{3-j} = 0, \qquad (1)$$

где z комплексно, λ — параметр, принимающий большие по модулю значения,

$$p_j(z,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{j,n}(z)\lambda^{-n} \quad (j = 1, 2, 3,).$$

Предполагается, что z изменяется в области, содержащей точку, для которой равны два корня вспомогательного уравнения

$$x^3 + p_{1,0}(z)x^2 + p_{2,0}(z)x + p_{3,0}(z) = 0, \qquad (2)$$

причем дискриминант уравнения (2) имеет лишь простые нули. Указывается, что, зная решения уравнения, коэффициенты которого совпадают с коэффициентами уравнения (1) с точностью до членов порядка $(1/\lambda)^m$ (m — произвольное натуральное число), можно, с той же точностью, через решения этого уравнения, выразить фундаментальную систему решений уравнения (1). Подробное доказательство не приводится.

Б. П. Демидович

5776. Асимптотическое решение линейного дифференциального уравнения второго порядка при больших значениях параметра. О л в е р (The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter. O l v e r F. W. J.), Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1954, A247, № 930, 307—327 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$d^2w/dz^2 = (up(z) + q(z))\, w, \qquad (1)$$

где $u > 0$ — параметр, $p(z)$ и $q(z)$ — аналитические функции в некоторой области изменения комплексного переменного z, где или 1) $p(z)$ не имеет ни нулей, ни особых точек, или 2) $p(z)$ имеет один простой нуль, или 3) $p(z)$ имеет один корень второго порядка. Уравнение (1) приводится к виду

$$d^2w/dz^2 = (ug(z) + f(z))\, x. \qquad (2)$$

Здесь $g(z) = 1$ в случае 1) и 3) и $g(z) = z$ в случае 2), $f(z)$ — регулярная функция в соответствующей области D. Предполагается, что D и некоторая область $D' \subset D$ односвязны и имеют взаимно непересекающиеся границы, состоящие из конечного числа прямолинейных отрезков; если D не ограничена, то $f(z) = O(|z|^{-2})$ при $|z| \to \infty$ равномерно относительно $\arg z$.

Пусть $g(z) = z$, $v = u^{1/2}$, $p_j = e^{(j-1)\pi/3}$ $(j = 1, 2, 3)$, S_j — часть D, заключенная между лучами $\pi - (j-2)2/3\pi$ и $\pi - j2/3\pi$, $P_j(z) = \mathrm{Ai}(p_j z)$ (Ai — функция Эйри). Пусть далее a_j — произвольная точка из $S_j \cap D'$; тогда $z \in D_j$, если $z \in D'$,

$$\left|\exp\left\{-\frac{2}{3}(p_j z)^{3/2}\right\}\right| \geqslant \left|\exp\left\{-\frac{2}{3}(p_j a_j)^{3/2}\right\}\right|$$

и существует путь, соединяющий a_j с z, принадлежащий D' и не более чем двум S_j, который не пересекает кривую $\exp\left\{-\frac{2}{3}(p_j z)^{3/2}\right\} = \mathrm{const}$, проходящую через z.

Доказано, что (2) имеет решения $w_j(z)$ $(j = 1, 2, 3)$, допускающие при $z \in D_j$, $u \to \infty$ асимптотические разложения вида

$$W_j(z) = P_j(vz)\left\{1 + \sum_{s=1}^{m} \frac{A_s(z)}{u^s}\right\} + \frac{P_j'(vz)}{v^2}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{B_s(z)}{u_s} + \frac{\exp\left\{-\frac{2}{3}(p_j vz)^{3/2}\right\}}{1 + |vz|^{1/4}}\, O\left(\frac{1}{u^{m+1/2}}\right),$$

$$W_j'(z) = P_j(vz)\sum_{s=0}^{m-1}\frac{C_s(z)}{u^s} + vP_j'(vz)\left\{1 + \sum_{s=1}^{m}\frac{D_s(z)}{u^s}\right\} + (1 + |vz|^{1/4})\exp\left\{-\frac{2}{3}(p_j vz)^{3/2}\right\} O\left(\frac{1}{u^m}\right),$$

где $A_s(z)$, $B_s(z)$, $C_s(z)$, $D_s(z)$ — регулярные функции,

довлетворяющие некоторым рекуррентным соотношениям, зависящим от некоторой постоянной.
Аналогичный, но более простой результат справедлив для случая $g(z)=1$.
Дан обзор литературы по асимптотическим разложениям решений уравнения (1). Г. Л. Мизернюк

5777. Однолистные решения уравнения $W''+pW=0$. Робертсон (Schlicht solutions of $W''+pW=0$. Robertson M. S.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 76, № 2, 254—274
Рассматривается уравнение

$$d^2W/dz^2+p(z)W=0, \qquad (1)$$

где

$$z^2p(z)=p_0+p_1z+\ldots+p_nz^n+\ldots$$

регулярно в круге $|z|<1$, $z=0$ — особая регулярная или обыкновенная точка уравнения (1). В окрестности $z=0$ уравнение (1) допускает решение

$$W(z)=z^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,$$

где α — тот из двух корней α, β ($\alpha+\beta=1$) определяющего уравнения, для которого $\mathrm{Re}(\alpha)\geqslant 1/2\geqslant \mathrm{Re}(\beta)$.
Ищутся достаточные условия, налагаемые на $p(z)$, при которых функция

$$\chi(z)=\{W(z)\}^{1/\alpha}=z+\ldots \quad (\chi'(0)=1)$$

однолистна в $|z|<1$.
Основной результат, громоздкий для формулировки, получен при помощи рассмотрения уравнения

$$\frac{d^2W}{dz^2}+\left\{C\left[p^*(z)-\frac{p_0^*}{z^2}\right]+\frac{p_0^*}{z^2}\right\}W=0,$$

где

$$z^2p^*(z)=p_0^*+p_1^*z+\ldots+p_n^*z^n+\ldots$$

регулярно для $|z|<1$, вещественно на вещественной оси, и $p_0\leqslant 1/4$, C — некоторая неотрицательная постоянная. Рассмотрен ряд частных случаев, иллюстрированных примерами. К. Я. Латышева

5778. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 6, 885—888
Рассматривается система

$$dx/dt=P(x,y),\ dy/dt=Q(x,y) \qquad (1)$$

и измененная система

$$dx/dt=\overline{P}(x,y),\ dy/dt=\overline{Q}(x,y). \qquad (2)$$

Функции в правых частях непрерывны в некоторой области g плоскости и имеют непрерывные частные производные до порядка N (системы класса N) или являются аналитическими (системы аналитического класса).
Рассматриваются системы (2) δ-близкие до ранга $r\geqslant 1$ к системе (1) в области g (или $g^*\subset g$), т. е. системы, для которых в g (g^*) выполняются неравенства

$$|\overline{P}(x,y)-P(x,y)|<\delta,\ |\overline{Q}(x,y)-Q(x,y)|<\delta,$$

$$\left|\frac{\partial^{i+k}\overline{P}}{\partial x^i\partial y^k}-\frac{\partial^{i+k}P}{\partial x^i\partial y^k}\right|<\delta,\ \left|\frac{\partial^{i+k}\overline{Q}}{\partial x^i\partial y^k}-\frac{\partial^{i+k}Q}{\partial x^i\partial y^k}\right|<\delta,\ i+k\leqslant r.$$

Предполагается, что обе системы имеют общую точку $O(x_0,y_0)$ состояния равновесия, для которой корни характеристического уравнения — комплексные сопряженные, или чисто мнимые. Для случаев, когда (1) класса N или аналитического класса имеет негрубый предельный цикл L кратности N (или O является негрубым фокусом кратности k, $N=2k+1$), установлено следующее: 1) Любая система (2) класса N или аналитического класса, достаточно δ_0-близкая до ранга N к (1), имеет в достаточно малой ε_0-окрестности цикла L (ε_0-окрестности точки O для фокуса) не более N (для фокуса — k) замкнутых траекторий или предельных циклов; 2) При любых $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ и $0<\delta<\delta_0$ существуют системы (2) класса N или аналитического класса, δ-близкие к (1) до ранга N, имеющие в ε-окрестности цикла L ровно N предельных циклов (для случая фокуса — k замкнутых траекторий или предельных циклов).
Если точка $O(0,0)$ системы (1) аналитического класса есть центр, то для систем

$$\begin{aligned} dx/dt&=P(x,y)=\lambda_0x+\lambda_1(x^2+y^2)x+\ldots\\ &\ldots+\lambda_m(x^2+y^2)^mx\\ dy/dt&=Q(x,y)=\lambda_0y+\lambda_1(x^2+y^2)y+\ldots\\ &\ldots+\lambda_m(x^2+y^2)^my \end{aligned} \qquad (3)$$

доказывается что: 1) существуют $\varepsilon_0>0$ и $\lambda^0>0$ такие, что при всех $|\lambda_i|<\lambda^0$ у системы (3) в ε_0-окрестности O лежит не более $m-1$ замкнутых траекторий; 2) при любых $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ и $0<\lambda^*<\lambda^0$ можно указать такие значения $|\lambda_i^*|<\lambda^*$, при которых у системы (3) в ε-окрестности O лежат $m-1$ предельных циклов.
Авторы отмечают, что работа сделана в 1937 г. и что результаты ее используются в их работах, посвященных аналогичным вопросам. М. Н. Минкевич

5779. Характеристика сложных особых точек системы двух дифференциальных уравнений при помощи грубых особых точек близких систем. Губарь Н. А., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 3, 435—438
Рассматривается зависимость между топологической структурой траекторий системы дифференциальных уравнений

$$dx/dt=P(x,y),\ dy/dt=Q(x,y), \qquad (1)$$

заполняющих достаточно малую δ_0-окрестность сложной особой точки, и числом и характером простых особых точек в этой окрестности у измененной системы

$$\begin{aligned} dx/dt&=P(x,y)+p(x,y),\\ dy/dt&=Q(x,y)+q(x,y). \end{aligned} \qquad (1')$$

Предполагается, что особая точка системы (1) — изолированное состояние равновесия, являющееся m-кратной ($m\geqslant 2$) точкой пересечения кривых $P=0$, $Q=0$, в окрестности которой P и Q — аналитические функции x и y и такие, что $|P'_x|+|P'_y|+|Q'_x|+|Q'_y|\neq 0$, p, q — произвольные аналитические функции x, y, не превосходящие вместе со своими частными производными до порядка m включительно по абсолютному значению достаточно малого числа ε_0 (ε_0 — добавки); система (1) в рассматриваемой области имеет только простые (грубые) особые точки.
Тогда для любых $\varepsilon<\varepsilon_0$ и $\delta<\delta_0$ существуют ε-добавки, при которых система (1′) имеет m (но не более) простых особых точек в δ-окрестности сложной особой точки системы (1). Общее число появляющихся особых точек может быть и меньше m, в зависимости

от p, q, но распределение их по типам не вполне произвольно.

Между числами рождающихся простых седел, узлов и фокусов устанавливаются соотношения, характерные для каждого типа m-кратной точки. При $P'_x + Q'_y \neq 0$ сложный узел (седло), распадаясь, дает всегда простых узлов (седел) на единицу больше, чем седел (узлов); при расщеплении седла-узла число простых узлов и седел одинаково. Аналогичными свойствами определяются другие типы возможных особых точек системы (1) и уточняется их классификация.

Доказательства не приведены. Н. Ф. Отроков

5780. **Аналитические многообразия, переходящие в себя посредством периодической системы дифференциальных уравнений.** Америо (Varietà analitiche chiuse trasformate in sè dai sistemi differenziali periodici. Americo Luigi), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 77—78 (итал.)

Рассматривается система

$$x' = X(t, x, y),\ y' = Y(t, x, y), \qquad (1)$$

где X, Y — непрерывные функции, периодические по t с общим периодом T и аналитические по x и y. Пусть $x = x(t, \bar{x}, \bar{y})$, $y = y(t, \bar{x}, \bar{y})$ — решение системы (1) с начальными условиями:

$$x(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) = \bar{x},\ y(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) = \bar{y},$$

$$E^*(x^*, y^*) = \Phi(\bar{E}(\bar{x}, \bar{y}))$$

— преобразование, ставящее в соответствие точке $\bar{E}$ точку E^*, где $x^* = x(\bar{t}+T, \bar{x}, \bar{y})$, $y^* = y(\bar{t}+T, \bar{x}, \bar{y})$. Как известно (Пуанкаре, Биркгоф), если имеется простая замкнутая линия λ_0, ограничивающая область D_0, причем $\Phi(D_0) \subset D_0$, то существует континуум λ такой, что $\Phi(\lambda) = \lambda$. В общем случае λ имеет сложную топологическую структуру.

Автор, не приводя доказательства, формулирует следующий результат: Пусть λ_0 — простая замкнутая аналитическая кривая $x = \varphi_0(\tau)$, $y = \psi_0(\tau)$, φ_0, ψ_0 — периодические аналитические функции от τ в области $|\operatorname{Im}\tau| \leqslant \sigma$, $\varphi_0'^2 + \psi_0'^2 > 0$ и решение (1), начинающееся при $t = \bar{t}$ в любой точке λ_0, где $|\operatorname{Im}\tau| \leqslant \sigma_0 \leqslant \sigma$, при $t \geqslant \bar{t}$ остается в некоторой ограниченной области S, принадлежащей области аналитичности функций X и Y. Тогда λ — аналитическая кривая, возможно, имеющая особенности, или точка. Число особых точек кривой λ конечно и они соответствуют периодическим решениям периода kT (k — натуральное число): решения, отвечающие обыкновенным точкам λ, квазипериодические в смысле Бора.

Б. П. Демидович

5781. **Об устойчивости в целом решения нелинейной системы дифференциальных уравнений.** Красовский Н. Н., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 6, 735—737

Рассматривается нелинейная система

$$dx_i/dt = X_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где X_i — непрерывно дифференцируемые функции во всем пространстве $-\infty < x_i < +\infty$, $X_i(0, \ldots, 0) = 0$; $\partial X/\partial x = \| \partial X_i/\partial x_j \|$ — матрица Якоби функций X_i и $F = A\partial X/\partial x + (\partial X/\partial x)^* A$ (* означает транспонирование). Если существует такая постоянная симметрическая положительно определенная матрица A, что собственные числа $\lambda_i(x_1, \ldots, x_n)$ матрицы F удовлетворяют во всем пространстве неравенствам $\lambda_i < -\delta < 0$, то очевидное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ асимптотически устойчиво в целом. При доказательстве используется один результат Н. П. Еругина (Прикл. матем. и механика, 1951, 15, № 2, 277—236).

В. А. Якубович

5782. **О приближенных представлениях решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.** Гермейер Ю. Б., Иргер Д. С., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 6, 961—964

Исследуется асимптотическое поведение решений уравнения

$$\ddot{x} + 2p(t)\dot{x} + q(t)x = 0,\ a \leqslant t < b\ (b \leqslant \infty), \qquad (1)$$

где $p(t)$ и $q(t)$ — в общем случае комплекснозначные функции t, непрерывные в полуинтервале $[a, b)$. Без доказательства формулируется следующее утверждение. Если комплекснозначные функции $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ непрерывны вместе со своими первыми производными при $a \leqslant t < b$, $\omega_2(t) - \omega_1(t) \neq 0$ при $a \leqslant t < b$,

$$\int_a^b \max_{i=1,2} \left| \frac{\dot{\omega}_i(t) + \omega_i^2(t) + 2p(t)\omega_i(t) + q(t)}{\omega_2(t) - \omega_1(t)} \right| dt < \infty,$$

и $\sup_{a \leqslant t_1 \leqslant t_2 < b} \exp \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}[\omega_2(t) - \omega_1(t)]\, dt < \infty$,

или $\sup_{a \leqslant t_1 \leqslant t_2 < b} \exp \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}[\omega_1(t) - \omega_2(t)]\, dt < \infty$,

то уравнение (1) имеет два решения:

$$x_1 = y_1(t) \exp \int_a^t \omega_1(s)\, ds,\ x_2 = y_2(t) \exp \int_a^t \omega_2(s)\, ds,$$

где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — функции, обладающие конечными не равными одновременно нулю пределами при $t \to b$. На основании этого утверждения делается ряд существенных выводов об асимптотическом поведении решений уравнения (1) при $t \to b$ и при $|\alpha| \to \infty$ в случае, когда $p(t)$ и $q(t)$ зависят от комплексного параметра α.

И. М. Рапопорт

5783. **Линейные дифференциальные системы второго порядка с периодическими L-интегрируемыми коэффициентами.** Чезари, Хейл (Second order linear differential systems with periodic L-integrable coefficients. Cesari Lamberto, Hale Jack K.), Riv. math. Univ. Parma, 1954, 5, № 1—3, 55—61 (англ.)

Даются некоторые обобщения известного критерия Чезари (Cesari L., Atti Accad. Ital. Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1940, 11, 633—692) ограниченности решений линейной системы второго порядка с периодическими коэффициентами, мало отличающимися от постоянных.

Теорема 1. Пусть почти всюду при $-\infty < x < \infty$

$$dy_\mu/dx = \sum_{\nu=1}^{2} [a_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}(x, \lambda)]\, y_\nu\ (\mu = 1, 2), \qquad (1)$$

где $a_{\mu\nu}$ — действительные постоянные; λ — комплексный параметр; $\varphi_{\mu\nu}(x, \lambda)$ — комплекснозначные функции, периодические по x с общим периодом $T = 2\pi/\omega$, L-интегрируемые по x на $[0, T]$ и непрерывные по λ при $\lambda = 0$ для почти всех $x \in [0, T]$. Кроме того, $\varphi_{\mu\nu}(x, 0) = 0$, $|\varphi_{\mu\nu}(x, \lambda)| < \omega(x)$ при $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ почти всюду на $[0, T]$, где $\omega(x)$ — L-интегрируема на $[0, T]$. Если: 1) характеристические числа ρ_1 и ρ_2 матрицы $A = \|a_{\mu\nu}\|$ таковы, что или а) $\operatorname{Re}\rho_j < 0$ ($j = 1, 2$), или б) $\rho_1 = i\sigma$, $\rho_2 = -i\sigma$, $\sigma > 0$, $m\omega \neq 2\sigma$ ($m = 1, 2\ldots$); 2) $\int_0^T (\varphi_{11} + \varphi_{22})\, dx \leqslant 0$ для всех $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ то абсолютно непрерывные решения системы (1) ограничены на $(0, +\infty)$ при достаточно малом $|\lambda|$.

Теорема 2. Пусть

$$y'' + \psi(x, \lambda)y' + \varphi(x, \lambda)y + \sigma^2 y = 0 \qquad (2)$$

почти всюду при $-\infty < x < +\infty$, где $\sigma > 0$ — постоянная, λ — действительный параметр, $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ — действительные функции, периодические по x с периодом $T = 2\pi/\omega$, L-интегрируемые по x на $[0, T]$ при $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ и непрерывные по λ при $\lambda = 0$ для почти всех $x \in [0, T]$. Если $\varphi(x, 0) = \psi(x, 0) = 0$, $\int_0^T \psi(x, \lambda)\, dx > 0$ при $|\lambda| \leqslant \lambda_0$; $|\varphi(x, \lambda)| < \eta(x)$, $|\psi(x, \lambda)| < \eta(x)$ при $x \in [0, T]$ и $|\lambda| \leqslant \lambda_0$, где $\eta(x)$ — L-интегрируема на $[0, T]$; $m\omega \neq 2\sigma$ $(m = 1, 2, \ldots)$, то при достаточно малом $|\lambda|$ каждое абсолютно непрерывное решение уравнения (2) ограничено в $(0, +\infty)$.

Метод доказательства основывается на обобщении результатов Хилла и Тамаркина (Hille E., Tamarkin J. D., Ann. Math., 1930, **31**, 479—528), относящихся к интегральным уравнениям типа Вольтерра.

Б. П. Демидович

5784. Об ограниченности решений линейных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами. Хейл (On boundedness of the solutions of linear differential systems with periodic coefficients. Hale Jack K.), Riv. mat. Univ. Parma, 1954, 5, № 1—3, 137—167 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$y_\mu'' + \sigma_\mu^2 y_\mu + \lambda \sum_{\nu=1}^n \varphi_{\mu\nu}(x)\, y_\nu = 0 \quad (\mu = 1, \ldots, n), \quad (1)$$

определенная почти всюду при $-\infty < x < +\infty$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — различные положительные числа; λ — действительный параметр; $\varphi_{\mu\nu}(x)$ — действительные периодические функции с общим периодом $T = 2\pi/\omega$, L-интегрируемые на $[0, T]$, причем $\int_0^T \varphi_{\mu\nu}(x)\, dx = 0$.

Доказывается, что если: а) $\varphi_{\mu\nu}(x) = \varphi_{\mu\nu}(-x)$ или б) $\varphi_{\mu\nu}(x) = \varphi_{\mu\nu}(x)$ и, кроме того, $m\omega \neq \sigma_\mu \pm \sigma_\nu$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, n, m = 1, 2, \ldots)$, то при достаточно малом $|\lambda|$ каждое абсолютно непрерывное на любом конечном интервале решение системы (1) ограничено. Для доказательства используется метод последовательных приближений в некоторой специальной форме. Полученная теорема является обобщением результатов Чезари (Cesari L., Atti Accad. Ital., Mem. Cl sci. fis., mat. e natur., 1940, **11**, 633—692; Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1940, **9**, 163—186). Даются обобщения на тот случай, когда σ_μ и $\varphi_{\mu\nu}(x)$ зависят от параметра λ. Кроме того, отмечается, что в приведенной выше формулировке условий ограниченности решений системы (1) можно отказаться от равенства нулю средних значений функций $\varphi_{\mu\nu}(x)$. Библ. 21 назв.

Б. П. Демидович

5785. Критерии устойчивости для линейных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами. Гамбилл (Stability criteria for linear differential systems with periodic coefficients. Gambill Robert A.), Riv. mat. Univ. Parma, 1954, 5, № 1—3, 169—181 (англ.)

Изучается система

$$\ddot{y}_j + \sigma_j^2 y_j + \lambda \sum_{h=1}^n \varphi_{jh}(t)\, y_h = 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \quad (1)$$

где: (A) σ_j — различные положительные числа; (B) λ — действительный параметр; (C) $\varphi_{jh}(t)$ — действительные периодические функции с периодом $T = 2\pi/\omega$, допускающие разложение в абсолютно сходящиеся ряды Фурье, причем $\int_0^T \varphi_{jh}(t)\, dt = 0$; (D) $m\omega \neq \sigma_j \pm \sigma_h$ $(j, h = 1, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots)$. Как доказал Чезари (Cesari L., Accad. Ital., Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1940, **11**, 633—692), если (α) $\varphi_{jh}(t) = \varphi_{jh}(-t)$ или (β) $\varphi_{jh}(t) = \varphi_{hj}(t)$ $(j, h = 1, \ldots, n)$, то при $|\lambda|$ достаточно малом все решения системы (1) ограничены на $(-\infty, +\infty)$.

Систему (1) можно записать в матричной форме

$$\ddot{Y} + AY + \lambda \Phi Y = 0, \quad (2)$$

где $Y = \mathrm{col}\,(y_1, \ldots, y_n)$, $A = \mathrm{diag}\,(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2)$, $\Phi = \| \varphi_{jh}(t) \|$. Уточняя результат Чезари, автор получает следующий критерий:

Пусть для системы (2) выполнены условия (A), (B), (C), (D) и, кроме того, $\Phi = \Phi_0 + \Psi$, где $\Phi_0 = \mathrm{diag}(\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$, причем Φ_j $(j = 1, \ldots, k)$ — квадратные периодические матрицы с периодом T, обладающие свойствами матрицы Φ, элементы которых удовлетворяют условию (α) (четность) или (β) (симметрия), а элементы матрицы Ψ, лежащие ниже (или выше) клеток матрицы Φ_0, равны нулю. Тогда при $|\lambda|$ достаточно малом все решения системы (2) ограничены в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство основывается на оценках характеристических показателей решений системы (2).

Дается также критерий устойчивости для линейных периодических систем с малым затуханием. В качестве обобщения получены некоторые результаты для периодических линейных систем, нелинейно зависящих от параметра.

Б. П. Демидович

5786. Замечание к исследованию устойчивости периодических движений. Старжинский В. М., Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 1, 119—120

Рассматривается система дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\, x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

с кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов $P(t)$, удовлетворяющей условию $P(t + \omega) = P(t)$.

Показано, что исследование устойчивости тривиального решения может быть приведено, в весьма общем случае, к исследованию устойчивости решений уравнения

$$d^2z/dt^2 + p(t)\, z = 0,$$

где $p(t)$ — положительная периодическая функция периода ω.

Г. Л. Мизернюк

5787. Достаточные условия устойчивости системы второго порядка. Меркин Д. Р., Техн. информация по результатам н.-и. работ Ленингр. лесотехн. акад., 1954, № 15, 16—18

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + \alpha(t, x, \dot{x})\, \dot{x} + \beta(t, x, \dot{x}) = 0, \quad (1)$$

где при $t \geqslant t_0$, $|x| < \varepsilon$, $|\dot{x}| < \varepsilon$

$$\sup \alpha = A, \ \sup \beta = B, \ \inf \alpha = a > 0, \ \inf \beta = b > 0. \quad (2)$$

Строится функция Ляпунова v в виде квадратичной формы переменных x, $\dot{x}$. Условия определенной отрицательности dv/dt приводятся к неравенствам

$$\sqrt{B} - \sqrt{b} < a, \quad \sqrt{a(A - a)} - a < 4\sqrt{b}, \quad (3)$$

которые дают достаточные условия асимптотической устойчивости. Если (2), (3) выполняются при всех x, $\dot{x}$, то имеет место устойчивость в большом. Автор указывает, что в случае линейного уравнения (1) условия (3) пересекаются с условиями В. М. Старжинского (Прикл. матем. и механика, 1952, **16**, № 3).

Н. Н. Красовский

5788. Ограниченные и периодические решения для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Барбэлат (Soluţii mărginite şi soluţii periodice pentru anumite ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul al doilea. Barbălat I.), Bul. ştiinţ Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 4, 503—515 (рум.; резюме русс., франц.)

Даны достаточные условия: 1) ограниченности всех решений, 2) существования периодических решений уравнения

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t)$$

при меньших ограничениях на $f(x, \dot{x})$, чем в статье Левинсона (Levinson N., J. Math and Phys., 1943, 22, № 2, 41—48).

Вследствие ошибки в доказательстве (в формуле (9) $|y_5|^\alpha$ должно стоять в числителе) остается не доказанным более сильное из двух утверждений автора (утверждение 4′) на стр. 504. А. Ф. Филиппов

5789. **Об одном дифференциальном уравнении вынужденных незатухающих нелинейных колебаний.** Морис (A differential equation for forced undamped nonlinear oscillations. Morris Grainger R.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 141—142 (англ.)

Доказана теорема: Уравнение $\ddot{x} + 2x^3 = e(t)$, где $e(t)$ — четная функция с периодом 2π, имеет бесконечное множество периодических решений; среди них имеются решения с произвольно большими периодами (кратными 2π). А. Ф. Филиппов

5790. **Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным.** Кац А. М., Прикл. матем. и механика, 1955, 19, № 1, 13—32

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + F(x) = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon, t), \qquad (1)$$

где ε — малый параметр, $F(x)$ — аналитическая функция x, $f(x, \dot{x}, \varepsilon, t)$ — аналитическая функция от аргументов x, $\dot{x}$ и ε и периодическая по t с периодом T. При $\varepsilon = 0$ (1) переходит в уравнение для свободных колебаний консервативной системы

$$\ddot{x}_0 + F(x_0) = 0. \qquad (2)$$

Если известно общее решение уравнения (2)

$$x_0 = x_0(t + \tau, \omega), \qquad (3)$$

периодическое с периодом $2\pi/\omega$ и зависящее от параметров τ и ω, периодическое решение (1) ищется в виде

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots, \qquad (4)$$

где x_0 — решение вида (3) при $\omega = 2\pi/T$, и некотором значении τ, которое надо найти, $x_1, x_2, \ldots$ — функции t с периодом T. Предполагая, что ряд (4) абсолютно и равномерно сходится, автор получает систему для последовательного определения искомых периодических функций. При этом, если τ есть простой корень уравнения $\int_0^T f(x_0, \dot{x}_0, 0, t)\dot{x}_0\,dt = 0$, то x_n определяются единственным образом и колебания называются колебаниями первой степени. В случае, если $\int_0^T f(x_0, \dot{x}_0, 0, t)\dot{x}_0\,dt = 0$ при любом τ, соответствующие колебания будут колебаниями высшей степени.

Исследуется устойчивость периодических решений (1), соответствующих как колебаниям первой степени, так и колебаниям высших степеней. Работа является дальнейшим развитием и уточнением результатов И. Г. Малкина (Малкин И. Г., Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1949). Ю. А. Митропольский

5791. **Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным (примеры).** Дроздов Ю. М., Прикл. матем. и механика, 1955, 19, № 1, 33—40

Ряд примеров, решаемых методом, приведенным Кацем (реф. 5790), в которых нелинейная функция $F(x)$ является нечетной.

Для уравнения $\ddot{x} + F(x) = \varepsilon(P\cos m\omega t - \beta\dot{x})$, где P и β — постоянные, находится решение, соответствующее колебаниям первой степени. Подробно рассматривается случай $m = 3$ и жесткой нелинейной характеристики, т. е. $dF/dx > 0$.

Для уравнения вида $\ddot{x} + F(x) = \varepsilon P\cos 2\omega t - \varepsilon^2\beta\dot{x}$ находится решение, соответствующее колебаниям второй степени. Кроме того, рассмотрено уравнение с периодическим коэффициентом типа $\ddot{x} + F(x) = \varepsilon x P\cos\omega t - \varepsilon^2\beta\dot{x}$.

Для всех примеров определяются области частот ω, в которых возможны колебания рассматриваемого вида. Ю. А. Митропольский

5792. **Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле.** Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Укр. матем. ж., 1955, 7, № 1, 5—17

Рассматривается динамическая система

$$dx_k/dt = X_k(\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_r)\ (k = 1, 2, \ldots, r),$$
$$d\alpha/dt = \lambda\omega(x_1, \ldots, x_r) + A(\alpha, x_1, \ldots, x_r), \qquad (1)$$

где α — угловая переменная, λ — большой параметр, X_k, A — периодические функции α с периодом 2π. Заменой переменных

$$x_k = \bar{x}_k + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}\xi_k^{(n)}(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r),$$
$$\alpha = \bar{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}U_n(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r), \qquad (2)$$

α можно исключить из правых частей (1) с любой степенью точности в разложении по степеням $1/\lambda$ и привести (1) к виду:

$$d\bar{x}_k/dt = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}X_k^{(n)}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r),$$
$$d\bar{\alpha}/dt = \lambda\omega(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r) + \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}\Omega_n(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r).$$

Физический смысл преобразования (2) заключается в разложении действительного движения, описываемого переменными $x_1, \ldots, x_r, \alpha$, на усредненное движение с координатами $\bar{x}, \ldots, \bar{x}_r$ и «дрожание», описываемое углом $\bar{\alpha}$ и функциями $U_n(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r)$ и $\xi_k^{(n)}(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r)$. Метод аналогичен асимптотическим методам теории нелинейных колебаний (Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, 1937; Боголюбов Н. Н., Сб. тр. Ин-та строит. механ. АН СССР, 1950, № 14).

Метод применяется к исследованию движения заряженной частицы в неоднородном электрическом и магнитном поле, которое, в нерелятивистском приближении, описывается уравнениями

$$d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F} + e(mc)^{-1}[\mathbf{vH}],\quad \mathbf{F} = e\mathbf{E}/m,\quad d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}.$$

Ю. А. Митропольский

5793. **О неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка.** Суяма (On the non-oscillatory solution of second-order linear differential equation. Suyama Yukio), Mem. Fac. Sci., Kyūsyū Univ., 1954, A8, № 2, 207—212 (англ.)

Приводится длинное доказательство неверной теоремы: Если $q(t)$ непрерывна при $0 \leqslant t < \infty$ и если существует конечный предел

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T\left(\int_0^t q(s)\,ds\right)dt, \qquad (1)$$

о решения уравнения

$$y'' + q(t)\,y = 0 \qquad (2)$$

околеблющиеся. Сначала рассуждения ведутся в предположениях аналитичности $q(t) > 0$ (теорема I), затем теорема II) без этих предположений.

При любом $\alpha > 0$ для $q(t) = \alpha(t+1)^{-2}$ условия обеих теорем выполнены, однако при $\alpha > 1/4$ решения уравнения (2) колеблющиеся, а при $\alpha \leqslant 1/4$ — неколеблющиеся. М. И. Ельшин

5794. О нулях решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. Суяма (On the zeros of solutions of second order linear differential equation. Suyama Yukio), Mem. Fac. Sci., Kyūsyū Univ., 1954, A8, № 2, 201—205 (англ).

Утверждается, что формула Титчмарша (Titchmarsh E. C., Eigenfunction expansions associated with second-order differential equation, Oxford, 1946, 130)

$$N(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\psi(\lambda)} [\lambda + q(t)]^{1/2} dt + O(1) \qquad (1)$$

для числа нулей решений уравнения

$$y'' + [\lambda + q(t)]\,y = 0, \qquad (2)$$

где $q(0) = 0$, $q'(t) > 0$ и непрерывна при $t > 0$, $\lim_{t\to\infty} q(t) = \infty$ и $\psi(\lambda)$ определяется из $q[\psi(\lambda)] = \lambda$, справедлива при этих более общих, чем у Титчмарша, предположениях и без условия Хартмана о выпуклости $q(t)$ (Hartman P., J. London Math. Soc., 1952, 27, 492—496). При доказательстве автор аппроксимирует $q(t)$ сверху и снизу ломаными и считает без доказательства, что для этих ломаных формула (1) справедлива, хотя для них ни условия Титчмарша, ни условия Хартмана не имеют места. М. И. Ельшин

5795. Об асимптотической формуле Хартмана и Винтнера. Проди (Intorno ad una formula asintotica di Hartman e Wintner. Prodi Giovanni), Ann. Scuola normale super. Pisa, 1953, 7, № 3—4, 277—286 (итал.)

Рассматривается уравнение

$$\Phi'' + (\lambda - f(s))\,\Phi = 0, \qquad (1)$$

где $f(s)$ — непрерывная при $s \in [0, \infty]$ функция, стремящаяся к ∞ при $s \to \infty$, а λ — вещественный параметр. Известно, что это уравнение допускает один (с точностью до постоянного множителя) интеграл $\overline{\Phi}(s, \lambda)$, стремящийся к нулю при $s \to \infty$. Пусть $\sigma = f^{-1}(\lambda)$, где f^{-1} — функция, обратная f.

Если λ достаточно велико, то в промежутке $0 \leqslant s < \sigma$ функция $\overline{\Phi}(s, \lambda)$ должна иметь нули.

Ранее (Hartman, Wintner, Amer. J. Math., 1948, 70, 461—480) была дана асимптотическая формула для последнего нуля $s^*(\lambda)$ интеграла $\overline{\Phi}(s, \lambda)$:

$$f^{-1}(\lambda) - s^*(\lambda) \sim i\,3^{-1/3} / (f'(f^{-1}(\lambda)))^{1/3} \quad (\lambda \to \infty), \qquad (2)$$

где i — первый положительный нуль функции

$$\psi(t) = \int_0^\infty \cos(r^3 + rt)\,dr. -$$

При этом требовались непрерывность первых двух производных $f(s)$ и условия:

a) $f''(s) = o(f'(s))^{4/3} \quad (s \to \infty)$,

b) $f''(s) \geqslant 0$.

Автором доказано, что для справедливости формулы (2) достаточно выполнения условия a).

Приведен пример, показывающий, что выполнение лишь условия b) недостаточно для справедливости (2). Более того, даже условие b) вместе с

$$f''(s) = O(f'(s))^{4/3} \quad (s \to \infty)$$

не обеспечивает выполнение (2). Г. Л. Мизернюк

5796. Симметризируемые задачи о собственных числах для обыкновенных дифференциальных уравнений. Детмар (Symmetrisierbare Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Dettmar H.-K.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 8/9, 284—287 (нем.)

Рассматривается система

$$M[y] = \lambda N[y] \qquad (1)$$

при граничных условиях

$$u_i[y] = \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{ik} y^{(k)}(a) + \beta_{ik} y^{(k)}(b)] = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (2)$$

где $M[y] = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\,y^{(k)}(x)$; $N[y] = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) y^{(k)}(x)$ $(0 \leqslant n < m)$, f_k, g_k непрерывны; $f_m(x) \neq 0$, $g_n(x) \neq 0$, $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть $\Phi[y]$ — оператор, являющийся линейной комбинацией операторов вида:

$$\sum_{k=0}^{r_0} p_{k0}(x)\,y^{(k)}(x) \quad (0 \leqslant r_0 \leqslant m),$$

$$\int_{c_1}^{x} dx_1 \sum_{k=0}^{r_1} p_{k1}(x, x_1)\,y^{(k)}(x_1) \quad (0 \leqslant r_1 \leqslant m-1),$$

$$\int_{c_2}^{x} dx_2 \int_{c_3}^{x_2} dx_1 \sum_{k=0}^{r_2} p_{k2}(x, x_1, x_2)\,y^{(k)}(x_1) \quad (0 \leqslant r_2 \leqslant m-1) \text{ и т. д.}$$

p_{k0}, $p_{k1}, \ldots$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$, $p_{r_i i} \not\equiv 0$, $a \leqslant c_j \leqslant b$ $(j = 1, 2 \ldots)$. Если для любых двух функций u, v класса C^n, удовлетворяющих условиям (2), $\{u, v\} = \{v, u\}$; $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, где $\{u, v\} = \int_a^b \Phi(u)\,M[v]\,dx$; $\langle u, v\rangle = \int_a^b \Phi[u]\,N[v]\,dx$, то задача (1), (2) называется симметризируемой. При $\Phi[y] \equiv y$ получается самосопряженная задача. Симметризируемые задачи имеют много общего с самосопряженными.

Если $\{u, u\} > 0$ и $\langle u, u\rangle > 0$ при $u \not\equiv 0$, то задача называется положительно определенной. Все собственные числа такой задачи вещественны и положительны, а множество их бесконечно, счетно и имеет лишь одну точку сгущения на бесконечности. Для собственных функций, соответствующим образом ортонормированных, справедливо соотношение: $\langle y_i, y_k\rangle = \delta_{ik}$; собственные числа $\lambda_k = \min_u R[u]$ при условии $\langle u, y\rangle = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, где $R[u] = \{u, u\} / \langle u, u\rangle$. Для резольвенты Грина $K(x, s; \lambda)$ задачи (1), (2) справедливо: $\Phi_x[K(x, s; \lambda)] \equiv \Phi_s[K(s, x; \lambda)]$.

Имеют место соотношения: $\langle u, u\rangle \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, y_k\rangle^2$ (неравенство Бесселя) и, при соответствующих дополнительных условиях, $\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, y_k\rangle\langle v, y_k\rangle$ (равенство Парсеваля), а также теорема, аналогичная теореме о разложении в ряд истокообразной функции.

Численные методы нахождения собственных чисел самосопряженных задач (метод последовательных приближений, метод Ритца и др.) обобщаются на случай симметризируемых задач. Доказательства не приведены. П. Д. Калафати

5797. Асимптотическое распределение собственных значений в естественным образом поставленных задачах на собственные значения. Леман (Die asymptotische Verteilung der Eigenwerte bei natürlichen Eigenwertaufgaben. Lehmann N. Joachim), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952/1953, 2, № 3, 373—380 (нем.)

Пусть W — пространство вещественных функций $y(x)$ с кусочно-непрерывной m-й производной в $[a, b]$, $(uMv) \equiv \sum_{\nu=0}^{m} \int_a^b f_\nu(x)\, u^{(\nu)}(x)\, v^{(\nu)}(x)\, dx + x'(u)\, Mx(v)$, $(uNv) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} \int_a^b g_\nu(x)\, u^{(\nu)}(x)\, v^{(\nu)}(x)\, dx + x'(u)\, Nx(v)$, где $f_\nu(x)$, $g_\nu(x)$ — вещественные функции с кусочно-непрерывным в $[a, b]$ ν-й производной, $f_m(x) > 0$, $x(y)$ и $x'(y)$ — «краевые векторы» вида:

$$(y(a), y(b), y'(a), y'(b), \ldots, y^{(m-1)}(a), y^{(m-1)}(b)),$$

M и N — симметричные матрицы с вещественными элементами, $m > n$. Рассматривается вариационная задача

$$\delta[(yMy) - \lambda(yNy)] = 0, \quad y \in W,$$
$$\sum_{\nu=0}^{m-1} [\alpha_{\mu\nu} y^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu} y^{(\nu)}(b)] = 0 \qquad (1)$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, p \leqslant 2m,$$

где $\alpha_{\mu\nu}$ и $\beta_{\mu\nu}$ вещественны. Доказывается, что если существует такая постоянная $c > 0$, для которой при любом $y \in W$, $y \not\equiv 0$, удовлетворяющем условию (1), $(yNy) > c \int_a^b y^2\, dx$, то для i-го собственного значения λ_i имеет место соотношение:

$$\lambda_i = [i\pi\gamma]^{2(m-n)} \left\{1 + O\left(\frac{1}{i}\right)\right\},$$

$$\gamma = \left| \int_a^b \left\{\frac{g_n(x)}{f_m(x)}\right\}^{\frac{1}{2(m-n)}} \right|^{-1}.$$

Таким образом, асимптотика собственных значений не зависит от краевых условий.

Приводятся примеры технических задач, в которых применяется полученный результат. В. И. Левин

5798. **Некоторые свойства разложений по собственным функциям. Титчмарш** (Some properties of eigenfunction expansions. Titchmarsh E. C.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 17, 59—70 (англ.)

Изучается суммируемость разложения

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) \qquad (1)$$

по собственным функциям, порожденным уравнением $\psi'' + [\lambda - q(x)]\psi = 0$ $(0 \leqslant x < +\infty)$, при условии $\psi(0)\cos\alpha + \psi'(0)\sin\alpha = 0$. Здесь $c_n = \int_0^\infty f(t)\, \psi_n(t)\, dt$, а спектр предполагается дискретным.

Теорема. Пусть при $x \to \infty$ $q(x) \sim Ax^k$, $q'(x) \asymp x^{k-1}$, $q''(x) = O(x^{k-2})$, $q'''(x) = O(x^{k-3})$, где $k > 0$, $A > 0$, и пусть $f(x)$ интегрируема в любом конечном интервале, причем $\int_0^T |f(x)|\, dx = o(T^\alpha)$, тогда почти всюду

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\lambda_n < \lambda} (1 - \lambda_n/\lambda)^p\, c_n \psi_n(x) = f(x),$$

если только $p \geqslant 1$ и $p \geqslant 2(\alpha - 1)/(k + 2)$. (Ср. Левитан, РЖМат, 1953, 734, 753, где подобные вопросы рассмотрены также и для операторов с частными производными). При сделанных выше предположениях автор доказывает также теоремы типа Парсеваля-Стеклова, Рисса-Фишера, Юнга-Хаусдорфа для разложений вида (1). Р. А. Александрян

5799 Д. **Устойчивость решений систем уравнений в полных дифференциалах. Егоров В. Г.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Уральский ун-т, Свердловск, 1955

5800 Д. **Относительно однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Сысоев А. Е.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. энергет. ин-т, М., 1955

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

5801. **Об одном классе линейных уравнений с частными производными второго порядка, интегрируемом при помощи системы обыкновенных уравнений. Чобанеску** (O clasă de ecuaţii liniare cu derivate parţiale du ordinul al doilea, integrabile prin sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare ordinare. Ciorănescu Nicolae), Studii şi cercetări mat., 1954, 5, № 3-4, 351—360 (рум.; резюме русс., франц.)

Доказывается, что уравнение с частными производными вида

$$E(u) \equiv r^2 \partial^2 u / \partial r^2 + P(r^2)\ \partial^2 u / \partial\theta^2 + Q(r^2)\ r\, \partial^2 u / \partial r \partial\theta +$$
$$+ R(r^2)\, r\, \partial u / \partial r + T(r^2)\, \partial u / \partial\theta + S(r^2)\, u = 0,$$

где P, Q, R, T и S — целые функции от r^2, допускает частные решения

$$r^{\lambda_1(n)} A_n(r^2) \begin{matrix}\cos n\theta \\ \sin n\theta\end{matrix} \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

где $\lambda_1(n)$ — корень уравнения $\lambda^2 + (R(0) - 1)\lambda + S(0) - P(0) n^2 = 0$ $(Q(0) = T(0) = 0)$. В частности, уравнение $r^2 \Delta u - k^2 u = 0$ имеет решения

$$r^{\sqrt{n^2+k^2}} \begin{matrix}\cos n\theta \\ \sin n\theta\end{matrix} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

И. Н. Векуа

5802. **О канонических преобразованиях. Лейтнер Р.**, Biul. Wojsk. akad. techn. Prace mat., 1953, 2, № 6, 109—119

Каноническое преобразование T переменных (x^k, y^k) к переменным (X^k, Y^k), где $k = 1, 2, \ldots, n$, определяется скобками Лагранжа

$$[x^\alpha, y^\beta] \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial Y^i}{\partial y^\beta} - \frac{\partial X^i}{\partial y^\beta}\frac{\partial Y^i}{\partial x^\alpha}\right) = \delta_{\alpha\beta},$$
$$[x^\alpha, x^\beta] = 0, \qquad [y^\alpha, y^\beta] = 0$$

в классе функций C^ν, или C^∞, или в классе аналитических функций C^{an}. Пусть задано семейство $T(t)$ канонических преобразований

$$X^i = f_i(t, x^k, y^k) \quad Y^i = g_i(t, x^k, y^k),$$

где функции f_i, $g_i \in C^1$, а параметр $t \in [0, 1]$. Ставится задача о возможности такого выбора f_i и g_i, чтобы при $t = 0$ семейство $T(t)$ обращалось в тождественное преобразование, а при $t = 1$ в преобразование T:

$$T(0) = I, \qquad T(1) = T. \qquad (1)$$

Отмечается связь канонических преобразований $T(t)$ с решениями канонических уравнений и ставится вторая задача о возможности выбора функции Гамильтона $H(t, X^k, Y^k)$, обеспечивающей построение семейства преобразований $T(t)$, удовлетворяющих условиям (1). Доказаны две теоремы, локально решающие поставленные задачи в классе функций C^ν, C^∞, C^{an}.

И. С. Аржаных

5803. **К вопросу о единственности решения системы дифференциальных уравнений в частных производ-**

ных. Плись (The problem of uniqueness for the solution of partial differential equations. Pliś A.), Bull. Acad. polon. sci., cl. 3, 1954, 2, № 2,55—57 (англ.)

К вопросу о единственности решения системы дифференциальных уравнений в частных производных. Плись А., Бюл. Польск. акад. наук, 1954, Отд. 3, 1, № 2, 51—53

Рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} [a_{ij}(x, y)\frac{\partial u_j}{\partial y} + b_{ij}(x, y)\, u_j] \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (1)$$

Карлеман (Carleman T., Ark. f. Mat. Astr. Phys., B26, 939, 17) доказал, что если в некоторой окрестности нуля a_{ij} обладают производными второго порядка, b_{ij} непрерывны и матрица $\{a_{ij}\}$ имеет m различных характеристических корней, то каждое решение (1), для которого $u_i(0, y) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, тождественно равно нулю в некоторой окрестности нуля.

Приводится пример системы вида (1), в которой $b_{ij} \equiv 0$, $a_{ij} \in C^\infty$ на всей плоскости и система имеет не равное тождественно нулю решение, принадлежащее C^∞ на всей плоскости и такое, что $u_j(0, y) = 0$. В этом случае не выполнено условие Карлемана о характеристических корнях матрицы $\{a_{ij}\}$. M. Krzyżański

5804. **Уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. 2. Уравнения с правой частью. Мальгранж** (Équations aux dérivées partielles à coefficients constants. 2. Équations avec second membre. Malgrange Bernard), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 2, 196—198 (франц.)

1) Какова бы ни была бесконечно дифференцируемая функция φ и дифференциальный оператор T — полином от производных с постоянными коэффициентами, — существует такая бесконечно дифференцируемая функция ψ, что $T\psi = \varphi$.

2) Пусть E — индуктивный предел пространств E_n, каждое из которых типа F; K — выпуклое множество, принадлежащее E и такое, что $K \cap E_n = K_n$ является компактом при каждом n. Тогда каждое выпуклое, содержащее нуль множество $V \subset K$ и такое, что $V \cap K_n$ есть открытое множество в K_n, является окрестностью нуля в K.

3) Можно найти k', удовлетворяющее следующему условию: если φ_i — последовательность линейных непрерывных функционалов над пространством всех бесконечно дифференцируемых функций и $T * \varphi_i \in D^{s+k'}$ и стремится к нулю в $D^{s+k'}$, то $\varphi_i \in D^s$ и $\varphi_i \to 0$ в D^s (D^s — пространство s раз непрерывно дифференцируемых финитных функций).

На основе 2) и 3) для пространства $D'_F = \bigcup D'^s$ $(s = 1, 2, \ldots,$ D'^s — пространство, сопряженное к D^s) получается $T * D'_F = D'_F$, т. е. каково бы ни было распределение $S \in D'_F$ и дифференциальный оператор T с постоянными коэффициентами, существует такое распределение $V \in D'_F$, что $T * V = S$. В частности, каждое уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами имеет элементарное решение $(S = \delta)$. Если T — эллиптический дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то $T * D' = D'$, где D' — пространство, сопряженное к пространству D Шварца.

Полные доказательства отсутствуют. В. М. Борок

5805. **Решение некоторых проблем деления. Часть I. Деление на полином от производной. Эренпрейс** (Solution of some problems of division. Part I. Division by a polynomial of derivaton. Ehrenpreis Leon), Amer. J. Math., 1954, 76, № 4, 883—903 (англ.)

Рассматривается вопрос о разрешимости уравнения

$$PT = S, \qquad (1)$$

где S — заданное распределение Шварца конечного порядка (т. е. производная конечного порядка от непрерывной функции), P — полином от производных с постоянными коэффициентами.

Рассматривается пространство D_F бесконечно дифференцируемых финитных функций; окрестность нуля в D_F определяется числами s и $\varepsilon > 0$ и состоит из всех функций $\varphi \in D_F$, которые удовлетворяют условиям: $|\varphi^{(p)}(x)| < \varepsilon$ $(0 \leqslant p \leqslant s)$. Сопряженное пространство D'_F состоит из распределений Шварца конечного порядка. Пространство $\tilde{D}_F$ состоит из преобразований Фурье функций из D_F; топология в $\tilde{D}_F$ такова, что соответствие $D_F \to \tilde{D}_F$ является топологическим изоморфизмом.

Пусть Q — полином от n неизвестных, а $Q\tilde{D}_F$ — пространство всех функций QG для $G \in \tilde{D}_F$; топология в $Q\tilde{D}_F$ индуцируется топологией пространства $\tilde{D}_F$. Доказывается, что соответствие $QG \to G$ дает непрерывное линейное отображение пространства $Q\tilde{D}_F$ на пространство $\tilde{D}_F$. Если PD_F — пространство функций Pf, $f \in D_F$, с топологией, индуцированной топологией пространства D_F, то соответствие $Pf \to f$ устанавливает непрерывное линейное отображение PD_F на D_F. Переходя к сопряженным пространствам, автор приходит к основному результату: каково бы ни было распределение $S \in D'_F$ и полином P, существует распределение $T \in D'_F$ такое, что $PT = S$. В частности, каждое уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами имеет элементарное решение в виде распределения конечного порядка $(S = \delta)$. Если S — бесконечно дифференцируемая функция, то T — также бесконечно дифференцируемая функция.

Результаты переносятся на случай систем уравнений вида (1) при условии, что определитель из дифференциальных операторов, составляющих систему, не равен тождественно нулю.

Как указывает автор, основные результаты, полученные им, ранее другим путем получил Мальгранж (РЖМат, 1955, 3199, 5804). В. М. Борок

5806. **Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для системы конечноразностных уравнений. Гуревич Б. Л.,** Докл. АН СССР, 1954, 99, № 6, 893—895

Используются методы И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова (Успехи матем. наук, 1953, 8, № 6, 3—54). Вводятся два пространства основных функций: K_{M_0}, состоящее из $\varphi(x)$ $(x = \{x_1, \ldots, x_N\})$, для которых $|D^p \varphi(x)| \leqslant C_1 \exp(-M_0(C|x|))$, $M_0(x) = (x+1)\ln(x+1)$ и Z^{Ω_0}, состоящее из $\psi(s)$ $(s = \{s_1, \ldots, s_N\})$, аналитически продолжаемых на всю комплексную область $s = \sigma + i\tau$ и таких, что для любого многочлена $P(s)$

$$\int_{-\infty+i\tau}^{+\infty+i\tau} |P(s)|^2 |\psi(s)|^2 d\sigma \leqslant A_1 \exp(\Omega_0(A|\tau|)),$$

где $\Omega_0(\tau) = e^\tau - \tau - 1$. Вместо $\Omega_0(x)$ и $M_0(x)$ можно

взять любые $\Omega(x)$ и $M(x)$ дополнительные по Юнгу. Пространства K_{M_0} и Z^{Ω_0} двойственны в смысле Гельфанда и Шилова.

Для K_{M_0} и Z^{Ω_0} вводятся соответственно два пространства обобщенных вектор-функций с m-составляющими $T^{(m)}(K_{M_0})$ и $T^{(m)}(Z^{\Omega_0})$.

Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = F\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, t\right) u(x,t), \quad u(x,0)=u_0(x) \qquad (1)$$

в классе $T^{(m)}(K_{M_0})$ (F — целая аналитическая матрица-функция от $\partial/\partial x$, непрерывная по t). Преобразованием Фурье задача (1) сводится к задаче Коши:

$$dv(s,t)/dt = F(s,t)\,v(s,t), \quad v(s,0)=v_0(s). \qquad (2)$$

Если $|\exp\int_{t_0}^{t} F(s,t)\,dt| \leqslant A_1(1+|s|^q)\exp\Omega(A|\tau|)$, то система (2) имеет решение, единственное в $T^{(m)}(Z^{\Omega})$, когда $v_0(s) \in T^{(m)}(Z^{\Omega})$, а система (1) имеет решение, единственное в $T^{(m)}(K_M)$, если $u_0(x) \in T^{(m)}(K_M)$. Методом А. Г. Костюченко и Г. Е. Шилова (Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3, 141—148) можно доказать, что если $u_0(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $N+2$, каждая из которых удовлетворяет неравенству

$$|u(x,t)| \leqslant C_1 \exp(\delta|x|\ln(1+|x|)) \qquad (3)$$

при любом δ, то решение (1) есть обычная вектор-функция. Если $F\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, t\right)$ — «обобщенный» разностный оператор, элементы матрицы которого $\sum_{k=1}^{K_{\mu\nu}} a_{k\mu\nu}(t) \times u(x_{k\mu\nu}+h_{k\mu\nu}/2\pi, t)$, то решение задачи Коши для (1) единственно в классе вектор-функций $u(x,t)$, удовлетворяющих (3) при каждом t.

Примечание референта. Полученный Б. Л. Гуревичем результат, дающий достаточное условие единственности, не нов. Из работы референта (Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, 17, № 2, 163—180) вытекает, что для системы с «обобщенным» шагом h_α ($\alpha = 1, \ldots, r$):

$$\partial u(x,t)/\partial t = f(x, t, u(x-h_1, t), \ldots, u(x+h_r, t)),$$
$$u(x,0) = \varphi(x)$$

(требования на f таковы, что линейная система Б. Л. Гуревича, есть частный случай (4)) решение задачи Коши единственно в классе

$$|u(x,t)| \leqslant A\exp\{(1-\varepsilon)H^{-1}|x|\ln(1+|x|)\} \qquad (4)$$

и неединственно в классе

$$|u(x,t)| \leqslant A\exp\{(1+\varepsilon)H^{-1}|x|\ln(1+|x|)\}, \qquad (5)$$

где $H = \max_{i=1,\ldots,r}|h_i|$. Условие (3) более узко, чем (4). (В (3) нельзя фиксировать δ, так как для достаточно большого H ввиду (5) единственности решения задачи Коши не будет.) Л. И. Камынин

5807. **Распространение разложения по собственным функциям с двумерного случая на высшие размерности.** Мартин (The extension of two-dimensional eigenfunction expansions to higher dimensions. Martin A. I.), Proc. London Math. Soc., 1954, 4, № 16, 437—455 (англ.)

Изучается спектральное разложение для уравнения

$$\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, \ldots, x_N)\}u = 0 \qquad (1)$$

в случае всего пространства E_N. Следуя Титчмаршу (Titchmarsh, Proc. London Math. Soc., 1951, 1, 1—27), автор изучает вначале спектральное разложение, когда уравнение (1) задано в конечном кубе. Для этого случая строится функция Грина уравнения (1). Затем доказывается, что функцию Грина $G(x, \xi; \lambda)$ уравнения (1) для всего пространства можно получить предельным переходом, увеличивая сторону куба до бесконечности.

Доказывается, что $G(x, \xi; \lambda) = G(\xi, x; \lambda)$; $G(x, \xi; \lambda)$ непрерывна при $x \neq \xi$; по x и ξ $G(x, \xi; \lambda)$ удовлетворяет уравнению (1); $G(x, \xi; \lambda) = O(1/r^{N-1})$ ($r = |x-\xi|$) при $\xi \to x$; на бесконечности модуль $G(x, \xi; \lambda)$ интегрируем в квадрате по x (или ξ).

Построив $G(x, \xi; \lambda)$, можно показать, что разложение единицы уравнения (1) порождается функцией $\theta(x, \xi; \lambda)$, которая по x, ξ непрерывна и по λ имеет ограниченную вариацию в каждом конечном промежутке. Доказана теорема: Пусть f и $f_p^* = (q-\Delta)^p f \in L_2(E_N)$ ($p \leqslant E[N/4]+1$) и пусть в случае неединственности функции Грина

$$f_{p-1}^* \partial G/\partial r - G\partial f_{p-1}^*/\partial r = o(1/|x|^{N-1}) \qquad (|x| \to \infty).$$

Тогда

$$f(x) = \lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\theta(x, \xi; R) - \theta(x, \xi; -R)]\,f(\xi)\,d\xi.$$

Примечание референта. Спектральное разложение уравнения (1) другим методом изучалось в работе М. П. Зюзько (РЖМат, 1954, 3327). Спектральное разложение для более общих уравнений изучено в работах Браудера и Гординга (Browder F. E., РЖМат, 1954, 3701, Gårding L., РЖМат, 1954, 2958). Б. М. Левитан

5808. **Об обратных задачах спектрального анализа для одного класса дифференциальных уравнений.** Сташевская В. В., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 3, 409—411

Рассматривается задача о единственности и восстановлении линейного дифференциального оператора второго порядка по заданной его спектральной функции. Эта задача изучалась ранее многими авторами: впервые В. А. Амбарцумяном (Zschr. f. Physik, 1929, 53, 690—695), затем Боргом (Borg G., Acta Math., 1945, 78, № 21—96), Л. А. Чудовым (Матем. сб., 1949, 25 (67), 3, 451—456), М. Г. Крейном, в случае конечного интервала; В. А. Марченко (Докл. АН СССР, 1950, 72, № 3, 457—460), М. Г. Крейном (Докл. АН СССР, 1951, 76, № 1, № 3), И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном (Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, 15, № 4) в случае краевой задачи с одним сингулярным концом.

Пусть $L_i[y] = y'' - [q_i(x) + n(n-1)x^{-2}]y$, а $y_i(x, s)$ — решение уравнения $L_i[y] + \lambda y = 0$, $\lambda = s^2$; $\nu = n - 1/2$, с условием в нуле $\lim_{x\to 0} x^{-n} y_i(x, s) = 1/2^\nu \Gamma(n+1/2)$. Следуя В. А. Марченко, автор доказывает, что если $\overline{\lim}_{x\to\infty} N_i(x)/\sqrt{x} = \infty$, где $N_i(x)$ — число точек роста спектральной функции $\rho_i(\lambda)$ оператора L_i, лежащих в интервале $(0, x)$, то

$$y_i(x, s) = \frac{\sqrt{sx}\,I_\nu(sx)}{s^n} + \int_0^x K_i(x, t)\frac{\sqrt{st}\,I_\nu(st)}{s^n}\,dt,$$

где ядро $K_i(x, t)$ вещественно и $\sup_{0\leqslant x\leqslant a}\int_0^x K_i^2(x, t)\,dt < +\infty$ ($0 < a < \infty$). Пусть далее

$$F(x, u) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^x \frac{(\sqrt{\lambda}\,t)^{1/2} I_\nu(\sqrt{\lambda}\,t)}{\lambda^{n/2}}\,dt\right] \times$$
$$\times \left[\int_0^u \frac{(\sqrt{\lambda}\,t)^{1/2} I_\nu(\sqrt{\lambda}\,t)}{\lambda^{n/2}}\,dt\right] d\sigma(\lambda),$$

где

$$\sigma(\lambda)=\begin{cases}\rho(\lambda)-\lambda^{n+1/2}/2(n+1/2), & \text{при } \lambda\geqslant 0,\\ \rho(\lambda), & \text{при } \lambda<0.\end{cases}$$

Теорема 1. Пусть при любом $a>0$ и некотором $\varepsilon>0$ вещественные функции $q_i(x)$ $(i=1, 2)$ таковы, что $\int_0^a |x\,q_i(x)|^{2+\varepsilon}\,dx<\infty$ и $\rho_1(\lambda)\equiv\rho_2(\lambda)$, тогда $q_1(x)\equiv q_2(x)$.

Теорема 2. Если $\rho_i(\lambda)$ неубывающая функция такая, что $\overline{\lim}_{x\to\infty}N_i(x)/\sqrt{x}=\infty$, при любом $x>0$ $\int_{-\infty}^{0}e^{\sqrt{|\lambda|}\,x}\,d\rho_i(\lambda)<\infty$ и функция $F(x, u)$ имеет непрерывные четвертые производные, то существует дифференциальный оператор L_i, для которого $\rho_i(\lambda)$ является спектральной функцией.

Теорема 1 (соответственно теорема 2) является перенесением на рассматриваемый случай теоремы Марченко (соответственно теоремы Гельфанда и Левитана). Р. А. Александрян

5809. **Теорема разложения по произведениям в случае сингулярных задач на собственные значения уравнений в частных производных, которые распадаются при разделении переменных.** **К о р д е с** (Der Entwicklungssatz nach Produkten bei singulären Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen, die durch Separation zerfallen. C o r d e s Heinz O t t o), Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. II-a. 1954, № 3, 51—69 (нем.)

Пусть $p^1(x)$, $q^1(x)$, $h^1(x)$, $k^1(x)$ непрерывны в промежутке $l_-^1<x<l_+^1$, $p^2(y)$, $q^2(y)$, $h^2(y)$, $k^2(y)$ — непрерывны в промежутке $l_-^2<y<l_+^2$.

Изучается задача:

$$-k^2(p^1u_x)_x-k^1(p^2u_y)_y+(q^1k^2+q^2k^1)u=\lambda(h^1k^2+h^2k^1)u. \tag{1}$$

Если искать решение уравнения (1) в виде произведения $u(x, y)=u^1(x)u^2(y)$, то уравнение (1) распадается в систему уравнений

$$\begin{aligned}&-(p^1u^{1\prime})'+(q^1-\lambda h^1-\mu k^1)u^1=0,\\ &-(p^2u^{2\prime})'+(q^2-\lambda h^2+\mu k^2)u^2=0.\end{aligned} \tag{2}$$

К системе (2) следует присоединить граничные условия, соответственно в сингулярной задаче. Граничные условия задачи (1) должны быть эквивалентны граничным условиям задачи (2).

В работе доказана следующая теорема: Задача (1) имеет полную систему ортогональных собственных функций, имеющих вид $u^1(x)u^2(y)$, при условии, что обе задачи

$$-(p^1u^{1\prime})'+[q^1-\lambda(h^1+k^1)]u^1=0, \qquad l_-^1<x<l_+^1,$$

$$-(p^2u^{2\prime})'+[q^2-\lambda(h^2+k^2)]u^2=0, \qquad l_-^2<y<l_+^2,$$

имеют дискретный спектр.

Эту теорему автор получает как следствие одной общей теоремы теории линейных операторов.

Б. М. Левитан

5810. **О колебаниях жестко закрепленной пластинки.** **С е г ё** (On the vibrations of a clamped plate. S z e g ö G a b o r), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 573—577 (англ.)

Рассматривается жестко закрепленная пластинка данной площади; λ — наименьшая частота собственных колебаний этой пластинки. В свое время Релей высказал предположение, что λ принимает наименьшее значение для круглой пластинки. Автор утверждает, что в своей более ранней работе (ссылки на нее нет) он доказал предположение Релея при дополнительном допущении, что соответствующая собственная функция не имеет узловых линий.

В реферируемой статье автор приводит соображения, которые, может быть, заставляют сомневаться в верности его допущения. Именно, путь $G(p, q)$ — функция Грина бигармонического оператора, удовлетворяющая условиям жесткого закрепления края. Тогда λ и соответствующая собственная функция $u(p)$ связаны уравнением

$$u(p)-\lambda^4\iint G(p, q)\,u(q)\,dq=0$$

(в тексте опечатка: напечатано λ вместо λ^4). По одной теореме Иентча, для того чтобы первая собственная функция не меняла знака, достаточно, чтобы ядро симметричного интегрального уравнения не меняло знака. Автор строит пример области, функция Грина $G(p, q)$ которой меняет знак; указывается что аналогичные примеры построены Ловнером и Гарабедяном; последний показал, что функция $G(p, q)$ меняет знак в случае эллипса, эксцентриситет которого достаточно близок к единице. С. Г. Михлин

5811. **Об одной двумерной вариационной задаче.** **Г а р а б е д я н, Ш и ф ф е р** (On a double integral variational problem. G a r a b e d i a n P. R., S c h i f f e r M.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 3, 441—446 (англ.)

Рассматривается нелинейное уравнение эллиптического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}[F'(\psi_x^2+\psi_y^2)\psi_x]+\frac{\partial}{\partial y}[F'(\psi_x^2+\psi_y^2)\psi_y]=0, \tag{1}$$

где $F=F(\psi_x^2+\psi_y^2)$ — аналитическая, возрастающая, выпуклая по $q=\sqrt{\psi_x^2+\psi_y^2}$. Уравнению такого типа удовлетворяет функция тока установившегося дозвукового газового потока, причем F определяется уравнением состояния газа. (1) является уравнением Эйлера—Лагранжа для вариационной задачи

$$\iint F(\psi_x^2+\psi_y^2)\,dx\,dy=\min. \tag{2}$$

Пусть $\psi(x, y)$ — решение задачи (2) в области D, принимающее, например, на границе C этой области заданные значения (предполагается лишь, что ψ имеет почти всюду в D ограниченные частные производные). Рассмотрим произвольную взаимно однозначную деформацию области D на себя

$$z^*=z+\varepsilon f, \tag{3}$$

где f — исчезающая на C комплекснозначная функция, непрерывная в D и имеющая там кусочно-непрерывные производные, а ε — комплексный параметр. Условие того, что интеграл (2) достигает экстремального значения, для деформаций (3) дает соотношение

$$\iint_D[(F-q^2F')f_z-4F'\psi_z^2f_{\bar z}]\,dx\,dy=0, \quad (F'=F'(q^2)).$$

Выбирая f специальным образом, авторы получают в любой замкнутой подобласти Ω из D представление

$$4\pi F'\psi_t^2=-\iint_\Omega(F-q^2F')(z-t)^{-2}\,dx\,dy+A(t),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши и $A(t)$ — аналитическая функция. Для уравнения Лапласа $F=q^2$ и из этого представления сразу следует аналитичность ψ_t. В общем случае нелиней-

ного уравнения вводится интеграл

$$H = -2\pi^{-1}\iint_{\Omega}(F - q^2F')\ln|z-t|\,dx\,dy + B;$$

B — гармоническая функция $\pi B_{tt} = -A(t)$. Показывается, что H удовлетворяет уравнению

$$H_{xx} + H_{yy} = Q(H_{xx}H_{yy} - H_{xy}^2), \qquad (4)$$

где Q — аналитич ская функция определяемая по F. В частности если $F = \lambda + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 q^2}$, λ, $\mu = \text{const}$, то $Q(t) \equiv t$ и (4) сводится к уравнению Монжа—Ампера. При помощи преобразования Лежандра отсюда выводится аналитичность минимальных поверхностей.

В последнем разделе предлагается некоторый симметризационный процесс, позволяющий в достаточно общих предположениях строить минимальные поверхности, равномерно удовлетворяющие условию Гельдера. Этот процесс применим также в задачах с числом неизвестных, бо́льшим 2, например, в задаче о минимуме интеграла

$$\iiint\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Б. В. Шабат

5812. **О смешанных граничных задачах. Комацу, Хонг** (On mixed boundary value problems. Komatu Yûsaku, Hong Imsik), Kôdai Math. Sem. Repts, 1953, № 3, 65—76 (англ.)

Выводятся формулы для решения смешанной граничной задачи теории потенциала в случае круговой области, когда на граничных дугах (α_k, β_k) $(k = 1, \ldots, n)$ задаются значения искомой ограниченной гармонической функции, а на дополнительных дугах — значения нормальной производной. Решение $u(z)$ ищется в виде $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$, где $u_1(z)$ и $u_2(z)$ являются решениями частного вида смешанных задач: $u_1 = u$ на дугах (α_k, β_k) и имеет равную нулю нормальную производную на дополнительных дугах окружности, $u_2 = 0$ на дугах (α_k, β_k).

При $n = 1$, отображая круг $|z| < 1$ на полукруг $|\xi| < 1$, $\operatorname{Im}\xi > 0$ так, чтобы точки α_1 и β_1 соответствовали точкам $\xi = +1$ и $\xi = -1$, и продолжая аналитически преобразованные искомые функций $u_1(z(\xi))$ и $u_2(z(\xi))$ на весь круг $|\xi| < 1$, удается получить явную формулу для функции $u(z)$. Когда $n = 2$, отображение круга $|z| < 1$ на круговое полукольцо и дальнейшее применение принципа симметрии позволяет найти решение задачи, содержащее эллиптические функций. В случае произвольного n применение этого способа приводит к интегральному представлению решения, содержащему функции Грина и Неймана для определенной области.

Отметим, что рассматриваемая задача непосредственно приводится к задаче Римана—Гильберта, простое и эффективное решение которой известно (см., например, Мусхелишвили Н. И. «Сингулярные интегральные уравнения», 1946, М.— Л., гл. IV).

И. Н. Карцивадзе, Г. Ф. Манджавидзе

5813. **О смешанных граничных задачах для круга. Комацу, Хонг** (On mixed boundary value problems for a circle. Komatu Yûsaku, Hong Imsik), Proc. Japan Acad., 1953, **29**, № 7, 293—298 (англ.)

Результаты статьи подробно изложены в другой работе авторов (см. реф. 5812).

И. Н. Карцивадзе, Г. Ф. Манджавидзе

5814. **Об одном условии единственности для уравнения $\partial^2 z/\partial x\,\partial y = f(x, y, z)$. Фояш** (O condiţie de unicitate pentru ecuaţia $\partial^2 z/\partial x\,\partial y = f(x, y, z)$. Foiaş Ciprian), Comm. Acad. R. P. Romîne, 1954, 4, № 11—12, 565—572 (рум.; резюме русс., франц.)

Определяя операцию D в обобщенном смысле:

$$Dz \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \lim_{h,\,k\to 0}\frac{z(x+h, y+k) - z(x, y+k) - z(x+h, y) + z(x, y)}{hk},$$

автор доказывает, что уравнение $Dz = f(x, y, z)$ может иметь лишь единственное решение $z(x, y)$, удовлетворяющее условиям: $z(x, y_0) = \varphi_1(x)$, $z(x_0, y) = \varphi_2(y)$ $(\varphi_1(x_0) = \varphi_2(y_0))$, если φ_1 и φ_2 непрерывны и $|f(x, y, z) - f(x, y, z')| \leqslant K(x, y)\,\varphi(|z - z'|)$, где $K(x, y)$ — суммируемая, а $\varphi(x)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\lim_{\xi\to 0}\int_{\xi}^{A} dx/\varphi x = \infty$, $A > 0$.

И. Н. Векуа

5815. **Теорема единственности для решения семейства гиперболических интегро-дифференциальных уравнений. Плись** (A uniqueness theorem for the solution of a family of hyperbolic integro-differential equations. Pliś A.), Ann. polon. math., 1954, **1**, № 1, 135—137 (англ.)

Доказывается теорема: уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_a^b u(t, s)\,ds = \frac{\partial u(t, b)}{\partial s} - \frac{\partial u(t, a)}{\partial s}$$

имеет не более одного решения $u \in C^1(T)$ (T треугольник: $0 \leqslant t < k$, $|x| < k - t$, $k > 0$), удовлетворяющего начальным условиям $u(0, x) = \varphi(x)$, $u_t(0, x) = \psi(x)$ $(|x| < k$, причем $|a|$, $|b| < k - t$; $0 \leqslant t < k)$. Другое доказательство этой теоремы дал Т. ажевский (РЖМат, 1955, 1273).

K. Maurin

5816. **Специальный случай задачи с нормальной производной для составного дифференциального уравнения с частными производными третьего порядка. Дейвис** (A special case of the normal derivative problem for a third order composite partial differential equation. Davis Robert B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 5, 720—725 (англ.)

Пусть $y(x) = A$ — кривая на полуплоскости $x \geqslant 0$, соединяющая точки $P_1(0, -y_1)$, $P_2(0, y_1)$, $y_1 > 0$, и имеющая непрерывную кривизну,

$$dy/dx|_{P_i} = d^2y/dx^2|_{P_i} = 0 \quad (i = 1, 2);$$

с прямыми $y = \pm y_1$ кривая A пересекается только в точках P_i. С характеристиками составного уравнения

$$\Delta u_x \equiv \partial^3 u/\partial x^3 + \partial^3 u/\partial x\partial y^2 = 0 \qquad (1)$$

A пересекается в одной точке (уравнение $b_1u_{xxx} + b_2u_{xxy} + b_3u_{xyy} + b_4u_{yyy} + \ldots = 0$ называется составным, если $\sum_{k=0}^{3} b_{k+1}\alpha^{3-k}$ имеет только один вещественный нуль).

Пусть R — выпуклая область, ограниченная A и отрезком $S_1(-y_1, y_1)$.

Функции $g_1(x, y)$ и $g_2(y)$ определены для $|y| \leqslant u_2$, $|x| \leqslant y_2$, $y_2 \geqslant y_1$; g_1 — аналитическая по y вместе с производными второго порядка, $g_1 \in C^2$ относительно x; коэффициенты разложения g_1 и g_2 по степеням y имеют определенные ограничения; $\partial g_1/\partial x|_{P_i} = g_2|_{P_i}$.

Рассматривается задача 1: найти в R решение u уравнения (1) такое, что $u \in C^3$ в R, $u \in C$ на $R \cup S_1 \cup A$; $u_x \in C$ на $R \cup S_1$; $u = g_1(x, y)$ на $A \cup S_1$; $\partial u/\partial x = \partial u/\partial n = g_2(y)$ на S_1.

Функция $u = u^* + v$, где u^* и v — решения (1), причем u^* отличается от u только тем, что $u^* = g^*(s)$ на

1, $u^* = u_x^* = 0$ на S_1, а $v(0, y) = g_1(0, y)$, $v_x(0, y) = g_2(y)$, $v_{xx}(0, y) = h(y) - \partial^2 g_1(0, y)/\partial y^2$; $h(y)$ — линейная функция такая, что $h(\pm y_1) = \Delta g_1(0, \pm y_1)$, $v^*(s) = g_1(x, y)|_A - v|_A$.

Задачу для функции u^* автор приводит к задаче, рассмотренной Сьёстрандом (Sjöstrand O., Arkiv. mat., astr. och fys., 1935/1937, A25, № 21, 1—11).

Из существования и единственности $\tilde{u}^*$ следует существование и единственность решения задачи 1.

З. И. Халилов

5817. **Отображение областей при помощи решений эллиптических уравнений. Герген, Дрессел** (Mapping for elliptic equations. Gergen J. J., Dressel F. G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 77, № 1, 151—178 (англ.)

Обобщается основная теорема Римана теории конформных отображений на случай любых линейных систем вида

$$\alpha u_x + \beta u_y = v_y, \quad \gamma u_x + \delta u_y = -v_x, \quad \alpha > 0,$$
$$4\alpha\delta - (\beta + \gamma)^2 > 0. \qquad (1)$$

Основной результат содержится в теореме I: Пусть D^* и T^* — две простые, замкнутые плоские кривые Жордана, ограничивающие области D и T соответственно; z^1, z^2, z^3 — три различные точки на D^*, а Z^1, Z^2, Z^3 — три различные точки на T^*, расположенные в том же порядке; α, β, γ, δ — действительные, ограниченные функции класса C^1 в D такие, что $\alpha > 0$, $4\alpha\delta - (\beta + \gamma)^2 > \mu > 0$, где $\mu = \text{const}$ не зависит от (x, y). Тогда существует одно однозначное и непрерывное отображение $X = u(x, y)$, $Y = v(x, y)$ $D + D^*$ на $T + T^*$ класса C^1 в D, которое переводит D, D^*, z^1, z^2, z^3 в T, T^*, Z^1, Z^2, Z^3 соответственно, причем u, v удовлетворяют уравнениям (1) и условию $u_x v_y - v_y u_x > 0$ в D.

Существенно, что от коэффициентов (1) вблизи границы D^* требуется только ограниченность. В случае, когда коэффициенты (1) непрерывны в замкнутой области, аналогичная теорема следует из общей теории М. А. Лаврентьева квазиконформных отображений. Авторы, однако, делают более сильные ограничения на поведение коэффициентов внутри D; их метод доказательства отличается от геометрического метода М. А. Лаврентьева. Работа продолжает исследования авторов по системам вида $pu_x = v_y$, $pu_y = -v_x$, $p > 0$ (Duke Math. J., 1951, 18, 185—210).

Сначала теорема I доказывается для случая $\gamma = -\beta$, $\delta = \alpha$, когда производные α и β ограничены внутри единичной окружностью.

Для этого вводится множество Λ непрерывных, возрастающих функций $b(\theta)$ угла θ, удовлетворяющих условиям $b(\theta + 2\pi) = b(\theta) + 2\pi$, $b(\theta_n) = \theta_n$, $n = 1, 2, 3, 4$ ($\theta_4 = \theta_1 + 2\pi$), θ_1, θ_2, θ_3 — фиксированы, и строится некоторый нелинейный функционал $R(b)$, $b \in \Lambda$. Доказывается, что существует $b_0 \in \Lambda$, для которого $R(b)$ достигает минимума на Λ. При помощи b_0 строится некоторая система функций $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$; решение задачи Дирихле для вспомогательной системы уравнений первого порядка эллиптического типа с граничными значениями u_1 и u_2 дает решение первоначальной задачи. Теории этих вспомогательных систем посвящена первая часть статьи, представляющая самостоятельный интерес. Граничные задачи для рассматриваемых систем изучаются методом интегральных уравнений Фредгольма.

Авторы освобождаются от дополнительных условий на коэффициенты и область D, используя некоторые теоремы существования и компактности для систем (1) специального вида (систем Бельтрами), доказанные Морри (Morrey Ch. B., Trans. Amer. Math. Soc., 1938, 43, 126—166). Б. В. Боярский

5818. **Об уравнениях типа уравнения минимальных поверхностей. Финн** (On equations of minimal surface type. Finn Robert), Ann. Math., 1954, 60, № 3, 397—416 (англ.)

Рассматриваются квазилинейные уравнения эллиптического типа

$$a(x, y, p, q)\varphi_{xx} + 2b(x, y, p, q)\varphi_{xy} + c(x, y, p, q)\varphi_{yy} = 0. \qquad (1)$$

где $ac - b^2 = 1$, $p = \varphi_x$, $q = \varphi_y$.

Обычно при рассмотрении задачи Дирихле и других вопросов теории уравнений типа (1) для кривой Γ, задающей граничные условия, предполагают выполненным так называемое трехточечное условие: все плоскости, пересекающие Γ по крайней мере в трех точках, имеют равномерно ограниченный по всем плоскостям наклон. Это позволяет просто найти априорные оценки для решения и его первых производных. По теореме С. Н. Бернштейна (Math. Ann., 1910, 69, 82—136), возможность получения таких оценок гарантирует разрешимость задачи Дирихле.

Показывается, что по отношению к классу всех квазилинейных уравнений трехточечное условие для контура Γ существенно; строится пример, когда невыполнение этого условия влечет за собой неразрешимость задачи Дирихле.

Вводятся в рассмотрение три подкласса квазилинейных уравнений, для которых доказывается ряд теорем без предположения о выполнимости трехточечного условия.

Класс $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$ характеризуется тем, что

$$a(1 + p^2)/W + 2b(pq)/W + c(1 + q^2)/W \leqslant 2\varepsilon,$$
$$W = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Для решения $\varphi(x, y)$ уравнения класса $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$, рассматриваемого в круге C_R радиуса R, даются оценки модулей первых производных внутри круга C_ρ при любом $\rho < R$, они зависят от R, ρ и U_ρ — площади поверхности $z = \varphi(x, y)$, проектирующейся на C_ρ. Например, для уравнения минимальных поверхностей

$$(1 + q^2)\varphi_{xx} - 2pq\varphi_{xy} + (1 + p^2)\varphi_{yy} = 0,$$
$$\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} < \exp\left[64\pi U_\rho/(R - \rho)^2\right] 10U_\rho/\pi\rho^2.$$

Доказывается, что если каждое решение из последовательности решений $\varphi_n(x, y)$ уравнения класса $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$ определено в области D, поверхности $z = \varphi_n(x, y)$ равномерно ограничены по площади и φ_n равномерно ограничены в некоторой точке $(x_0, y_0) \in D$, то из последовательности φ_n можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к решению уравнения.

Два других подкласса $\mathcal{E}_2(\varepsilon)$ и $\mathcal{E}_3(\varepsilon)$ выделяются из $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$ дополнительными ограничениями. Для них доказывается ряд теорем, в частности о характере зависимости решения от граничных условий и коэффициентов уравнения. А. В. Погорелов

5819. **Асимптотическое решение для больших частот граничной задачи диффракции полосой. Бергер, Тимман** (Asymptotic solution at high frequencies of the boundary problem of diffraction by a strip. Burger Alewyn P., Timman R.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 328—329 (англ.)

Краткое изложение результата и метода нахождения асимптотики (для больших значений k) решения задачи

$$\Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0$$

при условии на оси $y = 0: u = 0$ для $|x| > 1$, $u_y = f(x)/ik$ для $|x| < 1$. Х. Л. Смолицкий

5820. **Об асимптотическом поведении решения одной краевой задачи из магнито-гидродинамики. I; II.** Н а р д и н и (Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema al contorno della magnetoidrodinamica. Nota I; Nota II. N a r d i n i R e n a t o). Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, 16, №2, 225—231; № 3, 341—348 (итал.)

Рассматривается решение $H(t, z)$ уравнения

$$\partial^2 H/\partial t^2 = a^2 \partial^2 H/\partial t\, \partial z + V^2 \partial^2 H/\partial z^2,$$

удовлетворяющее условиям:

$$\lim_{t \to +0} H(t, z) = \lim_{t \to +0} \partial H(t, z)/\partial t = 0,$$

$$\lim_{z \to +0} H(t, z) = G(t),$$

$$\lim_{z \to \infty} H(t, z) = 0, \quad t > 0, \quad z > 0$$

(РЖМат, 1955, 1277), где a и V — постоянные, зависящие от физических параметров задачи. Доказывается, что если преобразование Лапласа $g(s)$ функции $G(t)$ удовлетворяет в правой полуплоскости оценке $|g(s)| < M|s|^{-k}$, где $k > 1$ и M — постоянные, то

$$\lim_{a \to 0} H(t, z) = G(t - z/V) \quad (G(\tau) \equiv 0 \text{ при } \tau < 0).$$

При более сильных условиях на $G(t)$

$$H(t, z) = G(t - z/V) + R_1 a^2,$$

$$R_1 = \frac{z}{2V^3} G''\left(t - \frac{z}{V}\right) + \frac{z}{8V^5}\left[\frac{z}{V} G^{(4)}\left(t - \frac{z}{V}\right) - 3G''\left(t - \frac{z}{V}\right)\right] a^2 + R_2 a^4,$$

где R_2 ограничено при любых значениях a. В. И. Левин

5821 К. **Уравнения математической физики. Изд. 3-е.** С о б о л е в С. Л. 444 стр. с черт., М., Гостехиздат, 1954, 10 р.

Переработка лекций, читаемых автором в Московском университете. 3-е издание мало отличается от 2-го, которое в некоторых разделах было значительно переработано по сравнению с первым изданием.

Рассматриваются решения основных задач для классических линейных уравнений математической физики с постоянными коэффициентами. Только в случае двух независимых переменных рассматривается вопрос о приведении линейных уравнений с переменными коэффициентами к каноническому виду и решается задача Коши для таких уравнений по методу Римана. Большое место занимают теория функций вещественного переменного и теория интегральных уравнений. Изложение теории функции проводится для функций многих переменных и начинается с определения понятия интеграла от непрерывной функции на открытых и замкнутых множествах. Измеримые функции определяют известным C-свойством, интеграл Лебега — предельным переходом от интегралов по тем замкнутым множествам, где функция непрерывна. Из теории функций вещественного переменного при изложении математической физики автор использует достаточные условия для предельного перехода под знаком интеграла, теорему Фубини и сходимость в среднем. Это связано с широким применением обобщенных решений уравнений с частными производными и интегральных соотношений, вытекающих из формулы Грина, которые во многих случаях заменяют дифференциальные уравнения. Теория функций вещественного переменного применяется и при изложении теории интегральных уравнений. Специальным функциям отведено немного места. В конце кратко излагается теория бесселевых функций и более подробно — теория сферических функций.

Книга подразделена на 30 лекций. Заглавия основных лекций, посвященных математической физике: I — Вывод основных уравнений. II — Постановка задач математической физики. Пример Адамара. III — Классификация линейных уравнений 2-го порядка. IV — Уравнение колебаний струны и его решение методом Даламбера. V — Метод Римана. VIII — Уравнение распространения тепла. IX — Уравнения Лапласа и Пуассона. X — Некоторые общие следствия из формулы Грина. XI — Уравнение Пуассона в неограниченной среде. Ньютонов потенциал. XII. Решение задачи Дирихле и Неймана для полупространства. XIV. Волновое уравнение и запаздывающие потенциалы. XV — Свойства потенциалов простого и двойного слоя. XVI — Сведение задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям. XVII — Уравнения Лапласа и Пуассона на плоскости. XIX — Применение теории Фредгольма к решению задач Дирихле и Неймана. XX — Функция Грина. XXI — Функция Грина для оператора Лапласа. XXII — Корректность постановки краевых задач математической физики; XXIII — Метод Фурье.

Отметим отдельные места книги. В лекции VIII при помощи применения фундаментального решения и формулы Грина строится решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности в трехмерном случае. В лекции X подробно разбирается поведение гармонической функции вблизи особой точки и на бесконечности. В лекции XI формула Пуассона доказывается сведением к интегральному соотношению с произвольной функцией и применением известной леммы вариационного исчисления. В лекции XIII подробно выясняется единственность ограниченного решения соответствующих задач (для задачи Неймана с точностью до слагаемого). В лекции XIV решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения строится по Кирхгофу. Путем применения некоторого интегрального тождества доказывается, что построенная по Кирхгофу функция $u(x, y, z, t)$ удовлетворяет основному интегральному соотношению, при помощи которого определяются обобщенные решения уравнения. Если функция $u(x, y, z, t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка, то она удовлетворяет уравнению в классическом смысле. В лекции XV на основе исследований А. М. Ляпунова подробно излагаются свойства потенциалов простого и двойного слоя в трехмерном случае. Доказывается теорема А. М. Ляпунова, устанавливающая условие, при котором решение задачи Дирихле имеет правильные нормальные производные, и выясняется условие применимости к гармоническим функциям формулы Грина. Большой объем по сравнению с обычным изложением занимает лекция XX, посвященная функции Грина, в основном при одной независимой переменной. Выясняются понятия сопряженных операторов и сопряженных семейств функций и доказывается «основная лемма об интегралах сопряженных уравнений», удовлетворяющих некоторым предельным условиям. Много оригинального материала содержит лекция XXII. В ней подробно излагается понятие обобщенного решения для неоднородного уравнения теплопроводности, уравнения Пуассона и волнового уравнения. Доказывается, что для уравнения Лапласа, уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ и однородного уравнения теплопроводности обобщенные решения (в смысле интегрального соотношения) суть классические решения. В лекции XXIII формулируются свойства собственных

нкций $u_i(x, y, z)$ уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ при не-
тором предельном условии на границе S об-
сти. Одно из этих свойств формулируется так:
ли дважды непрерывно дифференцируемая функ-
я $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет предельному условию
$= 0$, которому подчинены и собственные функции,
$\varphi(x, y, z)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд
урье по собственным функциям, и ряд, полученный
него почленным дифференцированием, сходится в
еднем к соответствующей производной функции
(x, y, z). На основе упомянутых свойств собственных
нкций $u_i(x, y, z)$ проводится обоснование метода
урье для уравнения теплопроводности и для волно-
го уравнения, причем решение понимается в
бобщенном смысле; существенную роль играет сходи-
ость в среднем. Доказательство свойств фундамен-
альных функций $u_i(x, y, z)$ проводится в лекции XXV
а основе теории интегральных уравнений с симмет-
ичным ядром. В параграфе «Представление решения
ри помощи аналитических функций» лекции XXVI,
освященной неоднородному интегральному уравнению
симметричным ядром, указывается представление
резка ряда Фурье какой-либо функции f по собствен-
ым функциям ядра в виде контурного интеграла
$\frac{1}{2}(2\pi i)^{-1}\int_{C_N} A(E-\lambda A)^{-1} f d\lambda$, где A — соответствую-
ий интегральный оператор, E — оператор тождест-
енного преобразования; эта формула применяется к
ешению предельной задачи для уравнения теплопро-
одности. Указывается возможность применения такого
ппарата и при нелискретном спектре. В. И. Смирнов

3822 Д. Смешанная задача для одной параболической системы уравнений. Григорьева Е. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1955

3823 Д. Системы дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа, инвариантные относительно группы плоско-параллельных движений. Сунчелеев Р. Я., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Львовск. гос. ун-т, Львов, 1955

3824 Д. О краевых задачах для квазилинейных уравнений. Гусейнов А. Ф., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азербайдж. индустр. ин-т, Азербайдж. гос. ун-т, Баку, 1954

3825 Д. Операторные решения некоторых задач математической физики в неограниченных областях. Шельдяева М. Н., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гос. пед. ин-т, М., 1955

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

3826. Плоская задача теории упругости неоднородного ортотропного тела в полярных координатах (Расчет толстостенного цилиндра из неравномерно спрессованной древесины). Житков П. Н., Тр. Воронежск. ун-та, 1954, **27**, 20—29

При контурном прессовании древесины в ней создаются физико-механические свойства, характерные для неоднородного ортотропного упругого тела. Автор определяет составляющие тензоры напряжений в полярных координатах через функцию Эри. В предположении, что упругие параметры являются функциями только полярного радиуса, получено уравнение для функции напряжений

$$r^2\left(\frac{r}{E_\theta}\frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{\mu_r}{E_r}\frac{d\Phi}{dr}\right) - \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{rE_r}\frac{d\Phi}{dr} - \frac{\mu_\theta}{E_\theta}\frac{d^2\Phi}{dr^2}\right) = 0, \quad (1)$$

которое интегрируется при помощи ряда

$$d\Phi/dr = A/r + a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots$$

в случаях: 1) $E_\theta = E_{0\theta}(1 + kr)$, 2) $E_\theta = E_{0\theta}e^{kr}$ ($E_{0\theta}$ и k — постоянные). При помощи некоторых подстановок уравнение (1) для этих случаев приводится к гипергеометрическому, которое интегрируется обычным способом. Отмечается аналогия рассматриваемой задачи с задачей определения функций С. А. Чаплыгина в теории газовых струй. И. С. Аржаных

5827. Автоколебания при трении, близкие к гармоническим. Кононенко В О., Сб. тр. Ин-та строит. механ. АН УССР, 1954, № 19, 106—126
См. РЖМех, 1955, 615.

5828. Исследования о периодических решениях ограниченной задачи трех тел. Агостинелли (Ricerche sulle soluzioni periodiche del problema ristretto dei tre corpi. Agostinelli Cataldo), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 313 (итал.)

Краткий реферат работы. Г. А. Мерман

5829. Вынужденные колебания осциллятора Рокара. Аймерих (Forced vibrations of Rocard's oscillator. Aymerich Giuseppe), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 316—317 (англ.)

Изучаются колебания системы, описываемой уравнениями

$$dx/dt = -2\varepsilon\omega[x - x_0 \operatorname{sgn} x] + y;$$
$$dy/dt = -\omega^2 x + A\sin\omega_1 t.$$

Величины ε, $\sigma = \omega - \omega_1$, A малы. Метод исследования по существу совпадает с тем, который применен Андроновым и Виттом для уравнения Ван-дер-Поля. Результаты исследования не приведены.

Н. В. Адамов

5830. Формулировка условия пластической деформации как вариационной проблемы. Томас (Determination of the plastic yield condition as a variational problem. Thomas T. Y.), Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., 1954, **40**, № 5, 322—331 (англ.)

Пусть $e_{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензоры скорости деформации и напряжений в области V. Пластическую деформацию в V автор определяет при помощи тензоров

$$\eta_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} - {}^1/_3 e_{ii}\delta_{\alpha\beta},\quad s_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - {}^1/_3\sigma_{ii}\delta_{\alpha\beta}$$

($\delta_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$, $e_{ii} = 1$). Обычные теории пластичности, например теория Мизеса, формулируют условие пластичности в виде зависимости между составляющими тензора $\sigma_{\alpha\beta}$. Предлагается новый подход: определяется некоторая функция $\Psi(\eta, s)$, зависящая от составляющих $\eta_{\alpha\beta}$ и $s_{\alpha\beta}$, и формулируется вариационный принцип $\delta\int_V \Psi(\eta, s)\, dV = 0$, причем предполагается, что тензор s выражен через тензор η в силу физических законов. Выполнив вариацию, автор получил дифференциальные уравнения для $\eta_{\alpha\beta}$ и граничные условия и доказал, что полученная система совместима. При помощи уравнений $\sum_{\beta=1}^{3}(\eta_{\alpha\beta} - \tau_i\delta_{\alpha\beta})\, h_i^\beta = 0$ вводятся канонические переменные, упрощающие структуру уравнений пластической деформации. Обсуждается случай, когда $\psi = \psi(\theta)$, где θ — след тензора η. В заключение предлагается квадратичная зависимость между s и η. И. С. Аржаных

5831. Элементы теории сервосистем. Жоскен (Eléments de la théorie des systèmes asservis. Jos-

k i n H.), Bull. scient. A. I. M., 1954, 67, № 2, 80—134 (франц.)

Элементарное изложение основ теории устойчивости линейных систем автоматического регулирования, рассчитанное на читателей, знакомящихся с предметом и не имеющих необходимой математической подготовки. Гл. I, II — терминология; устройство простейших регуляторов. В гл. III поясняется, каким образом задача расчета систем регулирования сводится к исследованию линейных неоднородных дифференциальных уравнений вида $D(p)x = K(p)y$ $(p = d/dt)$, где $D(p)$ и $K(p)$ — операторные многочлены, а $y(t)$ — единичная функция Хевисайда, импульсная функция Дирака или гармоническая функция. В гл. IV излагаются элементарные основы теории таких уравнений. Используется обычный метод комплексных амплитуд, вводится понятие частотных характеристик системы. В гл. V вводится понятие о передаточной функции системы и приводятся примеры таких функций для простейших систем. В гл. VI рассматриваются вопросы устойчивости и стабилизации линейных систем, излагается критерий устойчивости Найквиста, при помощи которого демонстрируются различные методы стабилизации систем автоматического регулирования и следящих систем.

М. А. Айзерман

5832. Об устойчивости режима работы явнополюсного синхронного двигателя. Белюстина Л. Н., Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1954, № 10, 131—140

Изучается фазовая картина дифференциального уравнения

$$d^2\theta/dt^2 + k(1 - b\cos 2\theta)\, d\theta/dt + \sin\theta + r\sin 2\theta = T \qquad (1)$$

в зависимости от значений параметров $0 \leqslant b < 1$, $k > 0$, $r \geqslant 0$ и $T > 0$. Траектории рассматриваются на цилиндрической фазовой поверхности как интегральные кривые уравнения

$$dz/d\theta = z^{-1}(T - \sin\theta - r\sin 2\theta - k(1 - b\cos 2\theta)\, z) \qquad (z = d\theta/dt). \qquad (2)$$

Указываются две поверхности $T_1 = T_1(r)$ и $T_2 = T_2(r)$, разбивающие пространство параметров $\{k, r, T, b\}$ на три области. При $T > T_1(r)$ система не имеет состояний равновесия, при $T_1(r) \geqslant T > T_2(r)$ имеется два состояния равновесия (седло и устойчивый узел или фокус), при $T \leqslant T_2(r)$ — четыре состояния равновесия (два седла и два устойчивых узла или фокуса). В (1) и (2) θ — угол между полем ротора и вращающимся магнитным полем статора. Синхронный режим устанавливается лишь при наличии устойчивых состояний равновесия. При $T > T_1(r)$ все траектории наматываются на цикл, охватывающий цилиндр $(z(\theta + 2\pi) = z(\theta))$. Для $T \leqslant T_1(r)$ автор использует метод сравнения. Для каждой сепаратрисы указываются две кривые, между которыми она заключена. Так как уравнения этих кривых зависят от выбора параметров (параметры входят явно), ограниченные ими области установления определенного синхронного режима для начальных состояний (1) получаются также зависящими от этих параметров. В частности, получаются достаточные условия, при которых цикла, охватывающего цилиндр, не существует, и при любых начальных состояниях устанавливается определенный синхронный режим.

М. И. Ельшин

5833. О динамических уравнениях Чаплыгина при существовании условных неинтегрируемых уравнений. Шульгин М. Ф., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 6, 749—752

Приводится известное решение С. А. Чаплыгина (Собр. соч., Л., Изд-во АН СССР, 1933, т. 1, 207—215) задачи о плоском неголономном движении твердого тела, полученное им методом приводящего множителя. Показывается, что оно совпадает с решением этой же задачи, полученным М. И. Ефимовым (Прикл. матем. и механика, 1953, 17, № 6, 748—750) путем непосредственного интегрирования уравнений движения неголономных систем в форме Чаплыгина. Поэтому отпадает та часть замечания Ефимова (не заметившего опечаток в издании работ Чаплыгина и не проделавшего некоторых упрощений в окончательных формулах), в которой говорится об ошибочности решения Чаплыгина. Однако Ефимов в известной мере прав, отметив, что Чаплыгин ввел неголономную координату, производную по которой от приводящего множителя брал как производную по голономной координате, что, вообще говоря, могло привести к недоразумениям. Выводятся уравнения движения С. А. Чаплыгина для неголономных систем, усложненные введением избыточных координат.

Примечание референта. Вводимая Чаплыгиным координата q не является «избыточной» в смысле автора, так как она связана с основными переменными не одним, а двумя соотношениями.

В. В. Добронравов

5834. О динамическом эффекте изменения плотности при двумерных возмущениях потока с линейной функцией распределения скоростей. Хёйланд (On the dynamic effect of variation in density on two-dimensional perturbations of flow with constant shear. Hφiland Einar), Geofys. publ., 1953, 18, № 10, 1—12 (англ.)

Невозмущенный поток предполагается параллельным оси x с профилем скоростей $U = \alpha z$ и плотностью $Q = Q_0 \cdot \exp(-\beta z)$. Кинематический эффект β (во не динамический эффект $g\beta$) мал по сравнению с 1 и им можно пренебречь; тогда для амплитуды $Z(z)$ функции тока двумерных возмущений (реф. 776) получается уравнение

$$Z'' - (k^2 - g\beta/(\alpha z + c)^2)\, Z = 0,$$

где k — волновое число, а c — скорость распространения возмущений. Известно общее решение этого уравнения, которое может быть сведено к уравнению Бесселя (Taylor G. I., Proc. Roy. Soc., 1931, A132) $Z = (z - c/\alpha)^{1/2} B_{\delta/2}[ik(z - c/\alpha)]$, где $\delta = (1 - 4g\beta/\alpha^2)^{1/2}$, а $B_{\delta/2}$ — цилиндрическая функция порядка $\delta/2$. Автор изучает решения этого уравнения только в случае $k = 0$ при различных краевых условиях. В. И. Левин

5835. Разрывы в потоке сжимаемой жидкости. Кобёрн (Discontinuities in compressible fluid flow. Coburn N.), Math. Mag., 1954, 27, № 5, 245—264 (англ.)

Рассматриваются разрывы в идеальной сжимаемой жидкости. Исходными являются уравнения движения в переменных Эйлера, уравнение неразрывности и уравнение энергии; неизвестны компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$, давление p и плотность ρ. Пусть t — время, x^λ $(\lambda = 1,2,3)$ — координаты компоненты скорости $v_\lambda = q_{\lambda\mu} v^\mu$, где $q_{\lambda\mu}$ — единичный тензор $(\mu = 1, 2, 3)$, n_0 и n_μ — компоненты ортанормали замкнутой гиперповерхности S_3 в области (t, x^λ), $\partial/\partial t = \partial_0$, $\partial/\partial x^\lambda = \partial_\lambda$. Из дифференциальных уравнений движения получаются интегральные уравнения, лежащие в основе исследования:

$$\int_{S_3} [n_0 \rho v_\lambda + n_\mu(\rho v^\mu v_\lambda + p\delta^\mu_\lambda)]\, ds = 0,$$
$$\int_{S_3} [n_0\rho + n_\mu \rho v^\mu]\, ds = 0, \qquad (1)$$
$$\int_{S_3} [n_0\rho(q^2/2 + e) + n_\mu \rho v^\mu (q^2/2 + h)]\, ds = 0,$$

е $j = 0, 1, 2, 3$; $q = |v|$, δ^{μ}_{λ} — символ Кронекера, $\varepsilon = c_v T$, $h = c^2/(\gamma-1)$, c — местная скорость звука, T — солютная температура, определяемая для обыкновенного газа из уравнения Клэйперона, c_v и γ — постоянные.

Доказывается, что не существует такого многообразия, вдоль которого $\partial_j p$ и $\partial_j \rho$ испытывают разрывы, а v_μ непрерывны. Поверхность разрыва $\partial_j v_\mu$, вдоль которой $\partial_j p$ и $\partial_j \rho$ непрерывны, состоит из линий тока. ыводятся дифференциальное уравнение характеристической гиперповерхности распространения слабых разрывов и формулы для определения скачков. При исследовании сильных разрывов доказывается, что гиперповерхность касательных разрывов состоит из линий тока. Малые возмущения распространяются вдоль характеристического многообразия. Если c и скачок плотности известны, то можно определить скачки уплотнения. В конце исследуется распространение малых возмущений.

Основные результаты статьи хорошо известны (Курант, Кибель, Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. II, Гостехиздат, 1948; Ландау, Лившиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953; Зауэр, Введение в газовую динамику, Гостехиздат, 1947), однако метод исследования, приводящий к основным интегральным уравнениям (1) (являющимся формулировкой закона типа сохранения), является новым. Д. Е. Долидзе

5836. **О распространении малого возмущения в жидких средах, рассматриваемого как распространение разрыва в решениях дифференциального уравнения движения. Ничe** (Über die Fortpflanzung kleiner Störungen in flüssigen Medien, betrachtet als Ausbreitungsvorgang von Unstetigkeiten in den Lösungen der Bewegungsdifferentialgleichung. Nitsche Johannes), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 10/11, 361—373 (нем.; резюме англ., франц., русс.)

Решается задача о распространении небольших скачков давления и скорости в системе двух жидкостей (граница раздела жидкостей совпадает с осью oy, возмущение в момент $t = 0$ исходит из точки $x = -k < 0$, $y = 0$) при следующих начальных данных:

$$p(x, y, 0) = \begin{cases} P\,[(x+k)^2 + y^2]\,/\,2\varepsilon\bar{\rho}_1 c_1 & \text{для } (x+k)^2+y^2 \leqslant \varepsilon^2, \\ 0 & \text{для } (x+k)^2+y^2 > \varepsilon^2, \end{cases}$$

$$p_t(x, y, 0) = \begin{cases} -P/\rho_1 & \text{для } (x+k)^2+y^2 < \varepsilon^2, \\ 0 & \text{для } (x+k)^2+y^2 > \varepsilon^2, \end{cases}$$

где P — избыточное давление в точке возмущения, $\bar{\rho}_1$ — средняя плотность, c_1 — скорость распространения возмущения в первой среде, $\varepsilon \ll 1$. Потенциалы скорости φ_1 в среде I и φ_2 — в среде II должны удовлетворять при $x = 0$ соотношениям

$$\begin{gathered} (\partial\varphi_2/\partial t)_{II} - (\partial\varphi_1/\partial t)_I = (1 - \bar{\rho}_2/\bar{\rho}_1)(\partial\varphi_2/\partial t)_{II}, \\ (\partial\varphi_2/\partial x)_{II} = (\partial\varphi_1/\partial x)_I, \end{gathered} \qquad (1)$$

выражающим условия равенства давлений и нормальных составляющих скоростей при переходе через границу раздела. Чтобы удовлетворить соотношениям (1), наряду с основным ударным фронтом рассматриваются отраженный (в среде I) и преломленный (в среде II) ударные фронты. Найдено параметрическое выражение трех волновых поверхностей, дается распределение скачка давления по ним.

Как обобщение предыдущего рассмотрен осесимметрический случай. Условия при возникновении полного отражения рассмотрены на примере. В. Д. Чугунов

5837. **Точное интегрирование уравнений неустановившегося, медленно изменяющегося движения жидкости в некоторых параболических руслах. Прусов В. М.,** Уч. зап. Карело-финск. ун-та, 1954, 3, № 4, 63—76

Если зависимость между площадью живого сечения F русла и наибольшей глубиной H дается формулой $F = AH^n$, то система уравнений одномерного неустановившегося, медленно изменяющегося движения жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{g}{B}\frac{\partial F}{\partial s}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (UF)}{\partial s} = 0, \quad (B = gf(F)) \qquad (1)$$

приводится к одному линейному уравнению второго порядка, которое решается в замкнутом виде при $n = (2m+1)/2$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$). Полученное решение используется для исследования волнового движения в русле, поперечное сечение которого ограничено параболой второго порядка. Волны образуются в результате разрушения одной из двух стенок, которыми перегорожен канал в начальный момент. Решение системы (1) проводится так же, как решение уравнений одномерного неустановившегося движения адиабатического газа (Ландау Л., Лифшиц Е., Механика сплошных сред, 1944, 337). Д. Е. Долидзе

5838. **О значении функций, входящих в преобразование Клебша уравнений гидродинамики. Фортак** (Zur Bedeutung der in der Clebsch-Transformation der hydrodynamischen Gleichungen auftretenden Funktionen. Fortak Heinz), Acta hydrophys., 1954, 1, № 4, 145—150 (нем.)

При преобразовании Клебша уравнений гидродинамики вектор $\mathbf{v}$ скорости движения идеальной жидкости в случае, когда массовые силы имеют потенциал Φ, а плотность ρ есть функция давления p, может быть выражен через три скалярные функции φ, λ, μ:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi + \lambda \operatorname{grad}\mu. \qquad (1)$$

Для стационарного движения этим функциям может быть придан следующий физический смысл (Ertel H., Sitzungsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, 1952, № 3): $\lambda = H = v^2/2 + \Phi + \int \rho^{-1}\,dp$ — полная энергия; $\varphi = \int_{\theta}^{t} (v^2 - H)\,dt$, $\mu = t - \theta$, где θ — промежуток времени, через который частица жидкости, находящаяся в данной точке, пересечет фиксированную поверхность, ортогональную к линиям тока.

Доказывается, что если между двумя поверхностями, ортогональными к линиям тока, векторное поле $\mathbf{v}$ удовлетворяет уравнениям гидродинамики идеальной жидкости, то представление его в виде (1) не зависит от того, какую из этих поверхностей выбрать для подсчета θ, что и доказывает единственность представления (1). С. Г. Крейн

5839. **О теплопроводности в нестационарном потоке несжимаемой жидкости, в который погружена теплопроводящая плоская пластинка; приложение к электрическому анемометру. Муджа** (Sulla trasmissione termica per una piastra piana in corrente incompressibile non permanente; applicazione all'anemometria elettrica. Muggia Aldo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, 16, № 3, 335—340 (итал.)

В плоскопараллельном потоке, скорость которого $V(t)$ параллельна оси $0x$, помещена пластинка $0 \leqslant x \leqslant l$, $y = 0$, $-\infty < z < \infty$, поддерживаемая при постоянной температуре T_f. Температура в потоке $T(x, y, t)$

удовлетворяет уравнению

$$V(t)\,\partial T/\partial x + \partial T/\partial t = \lambda c^{-1}\,\partial^2 T/\partial y^2,$$

где c — удельная теплоемкость, а λ — коэффициент теплопроводности жидкости (постоянные). Предполагается, что $V(t) = V_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n \exp(in\omega t)$, причем $v_0 = 0$, $v_{-n} = \overline{v_n}$ и $|v_n| \ll V_0$. Решение ищется в виде ряда

$$T(x, y, t) = T_0(x, y) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vartheta_n(x, y) \exp(in\omega t),$$

где $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_{-n} = \overline{\vartheta_n}$, $|\vartheta_n| \ll T_0$; при этом $T_0 = \vartheta_n = 0$ при $y = \infty$ и при $x = 0$ и $T_0 = T_f$, $\vartheta_n = 0$ при $y = 0$. Тогда

$$T_0 = T_f\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-z^2/4}\,dz\right], \quad z = y\sqrt{V_0 c/\lambda x},$$

$$\vartheta_n = i\frac{v_n T_f}{2n\omega}\sqrt{\frac{V_0 c}{\pi\lambda}}\frac{y}{x^{3/2}}\left(1 - e^{-in\omega x/V_0}\right) e^{-V_0 c y^2/4\lambda x}.$$

Вычисляется количество теплоты, уносимое с пластинки потоком в единицу времени

$$Q(t) = -2\lambda\int_0^l \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0} dx = 4T_f\sqrt{\frac{V_0 c\lambda l}{\pi}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n e^{in\omega t},$$

где $q_n = 2\lambda\int_0^l \frac{\partial \vartheta_n}{\partial y}\Big|_{y=0} dx$ выражается через интегральный синус и интегральный косинус. В. И. Левин

5840. **Об одном преобразовании решений уравнений диффузии при определенных начальных и краевых условиях. О'Салливан** (A transformation of solutions of diffusion equations valid for certain initial and boundary conditions. O'Sullivan D. G.), Experientia, 1954, 10, № 11, 455—456 (англ.; резюме нем.)

Показывается, как решение обычной задачи диффузии (заданы начальные концентрации в областях (1) и (2) по разные стороны разделяющей поверхности) может быть интегрированием по времени преобразовано в решение следующей задачи диффузии: начальная концентрация в областях (1) и (2) равна нулю, во для $t > 0$ в области (1) равномерно распределены источники вещества (тепла) постоянной интенсивности.

В. И. Левин

5841. **Контуры концентрации в задаче о диффузии с границы. Уипл** (Concentration contours in grain boundary diffusion. Whipple R. T. P.), Philos. Mag., 1954, 45, № 371, 1225—1236 (англ.)

Два соприкасающихся металла при подогревании диффундируют друг в друга, причем экспериментально установлено, что шероховатость («зернистость») соприкасающихся поверхностей способствует диффузии. Явление изучается на модели полупространства $y > 0$ с коэффициентом диффузии D при $|x| > a$, разделенном тонким слоем $|x| \leqslant a$ с коэффициентом диффузии $D' \gg D$; граничное условие для концентрации $C(x, y, t)$: $C(x, 0, t) = H(t)$, где $H(t)$ — единичная функция Хевисайда. D и D' — постоянные; $C = C'$, $D'\Delta C' = \partial C'/\partial t$ при $|x| < a$; $D\Delta C = \partial C/\partial t$ при $|x| > a$; при $|x| = a$ ставятся условия сопряжения $C' = C$ и $D'\partial C'/\partial x = D\partial C/\partial x$. Задача решается переходом к функции $\Psi(x, \mu, \lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\,d\lambda \int_0^\infty \sin \mu y C(x, y, t)\,dy$, которая удовлетворяет уравнению $\partial^2\Psi/\partial x^2 - (\mu^2 + \lambda/D)\Psi = -\mu/\lambda$, $x > a$, и граничному условию $D'\partial^2\Psi/\partial x^2 - Da^{-1}\partial\Psi/\partial x - (D'/D - 1)\lambda\Psi = 0$ при $x = a$. Концентрация находится по формулам обращения:

$$C = \operatorname{erfc}\eta + \frac{\eta}{2\sqrt{\pi}}\int_1^\Delta \frac{d\sigma}{\sigma^{3/2}} e^{-\frac{\eta^2}{4\sigma}} \operatorname{erfc}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta - 1}{\Delta - \sigma}}\left(\frac{\sigma - 1}{\beta} + \xi\right)$$

как функция безразмерных величин $\xi = (x - a)/\sqrt{Dt}$, $\eta = y/\sqrt{Dt}$, $\Delta = D'/D$, $\beta = a(\Delta - 1)/\sqrt{Dt}$. Результат применяется для вычисления ряда контуров концентрации (границ проникновения одного металла в другой) при различных значениях параметров. Отмечается, что асимптотическая формула Фишера (Fisher J. C., J. Appl. Phys., 1951, 22, 74) $C \approx \exp(\eta\pi^{-1/4}8^{-1/2})\operatorname{erfc}\xi/2$ неверна. В. И. Левин

5842. **К задаче о тепловых напряжениях в пластинках. Треммель** (Beitrag zum Problem der Wärmespannungen in Scheiben. Tremmel Erwin), Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1953, 90, № 15, 247—251 (нем.)

Методами теории функций изучается вопрос о напряжениях, возникающих в пластинке при наличии в ней тепловых источников (стационарное двумерное поле). Вводится аналитическая функция $Q(x + iy) = T(x, y) + iS(x, y)$, где T — стационарная температура, удовлетворяющая уравнению $\Delta T = 0$. Указывается возможность определения функций Эри по функции $Q(x+iy)$, используя метод Н. И. Мусхелишвили (Angew. Math. und. Mech., 1933, 13, 264). В. И. Левин

5843. **Некоторые стационарные линейные и плоские задачи теплопроводности при переменном коэффициенте теплопроводности. Эйгенсон Л. С.**, Тр. Всес. заоч. энергет. ин-та, 1953, № 2, 46—64

5844. **О законе взаимности в динамике упругих тел. Граффи** (Über den Reziprozitätssatz in der Dynamik der elastischen Körper. Graffi D.), Ingr.-Arch., 1954, 22, № 1, 45—46 (нем.)

Замечание, сводящееся к тому, что в известном законе взаимности Бетти — Рэлея (Ляв, Математическая теория упругости, ОНТИ, 1935, М.— Л., гл. VII) для нестатического случая силы инерции можно исключить преобразованием Лапласа по времени $t > 0$ с последующим применением теоремы о свертке. Получающаяся форма закона взаимности не содержит производных по времени.

Примечание референта. Результат автора может быть также легко получен интегрированием по времени. Опечатка: на стр. 45, 23-я строка сверху, должно быть Re $p > 0$, а не < 0. В. И. Левин

5845. **Исследование плоских задач теории упругости методом теории потенциалов. Кахниашвили Н. С.**, Тр. Тбилис. ун-та, 1953, 50, 23—59

Исследуются плоские задачи теории упругости методом теории потенциалов, систематически изложенным В. Д. Купрадзе для пространственных задач теории упругости (Купрадзе В. Д., Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, 1950).

В статическом случае и для установившихся колебаний построены четыре типа фундаментальных решений и соответствующих им потенциалов простого и двойного слоя. Используя свойства построенных потенциалов и применяя теорию сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, автор доказывает теоремы существования и единственности для решений первой (на границе заданы смещения) и второй (на границе заданы напряжения) задач как в ограниченной, так и в неограниченной областях. Методом потенциалов построены эффективные решения основных граничных статических задач для полуплоскости круга и бесконечной плоскости с круговым отверстием.

В. С. Жгенти

5846. **Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. Моссаковский В. И.,** Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 2, 187—196

Рассматривается основная смешанная задача теории упругости для полупространства, когда внутри некоторого круга, лежащего на границе области, заданы компоненты вектора перемещения в виде тригонометрических полиномов от φ с коэффициентами, зависящими от ρ, а вне указанного круга компоненты напряжения равны нулю.

Искусственным приемом решение задачи приводится к ряду однотипных граничных задач вида: найти в полупространстве $z \leqslant 0$ гармонические функции $F_1(\rho, \varphi; z)$ и $F_2(\rho, \varphi; z)$, удовлетворяющие граничным условиям:

$$F_1(\rho, \varphi; 0) = \varphi_1(\rho), (\partial F_2/\partial z)_{z=0} = \varphi_2(\rho) \text{ при } \rho < a,$$

$$F_1(\rho, \varphi; 0) - AF_2(\rho, \varphi; 0) = 0, \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - B\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$$

при $\rho > a$,

где A и B — постоянные, $A \neq B$. Применяя некоторые интегральные представления искомых гармонических функций через функции Бесселя, удается последнюю задачу свести к граничной задаче линейного сопряжения для аналитической функции, решение которой находится просто.

В качестве примера рассмотрена задача о симметричном давлении плоского круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления. Вычисления доведены до численных результатов. И. Н. Карцивадзе

5847. **Проблемы, связанные с ромбом. I. Упругое кручение. Лакшмана-Рао, Сундара-Раджа-Ийенгар** (Problems connected with the rhombus Lakshmana Rao S. K., Sundara Raja Iyengar K. T.), J. Indian Inst. Sci., 1954, B36, № 4, 159—171 (англ.)

Рассматривается задача о кручении призматического стержня с поперечным сечением в виде ромба. Применение метода, аналогичного вариационному методу Рэлея — Ритца, позволяет получить хорошие границы для жесткости D. Для ромба с углом в 60° приводится следующее неравенство: $0{,}0909 < D/\mu a^4 < 0{,}0951$ (μ — модуль сдвига, a — сторона ромба). Дается численное решение (методом сеток) дифференциального уравнения для функции кручения: $\Delta\psi = -2$ при граничном условии $\psi = 0$ на сторонах ромба. Значение жесткости в случае угла 60° получается $D \approx 0{,}0721 \cdot \mu a^4$. Я. С. Уфлянд

5848. **К теории пластины, лежащей на четырех столбах. Мюллер** (Zur Theorie der Vierpilzplatte. Müller W.), Ingr.-Arch., 1954, 22, № 1, 60—72 (нем.)

Известные ряды Миттаг-Леффлера применяются к расчету прямоугольных пластин, нагруженных в четырех областях, симметричных относительно осей симметрии пластины. В уравнении $N\Delta\Delta w = p(x, y)$ функция $p(x, y)$ представляется в виде произведения двух рядов Фурье $f(x)g(y)$, после чего применяется метод разделения переменных, который и приводит к необходимости суммировать некоторые ряды Миттаг-Леффлера. Рассматриваются различные условия на краях пластины, а также случай сосредоточенных нагрузок. В. И. Левин

5849. **Об изгибе консольных прямоугольных плит. III. Койтер, Алблас** (On the bending of cantilever, rectangular plates. III. Koiter W. T., Alblas J. B.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, B57, № 5, 549—557 Indagationes math., 1954, 16, № 5, 549—557 (англ.)

Рассматривается изгиб упругой тонкой консольной плиты ($0 \leqslant x < \infty$, $|y| \leqslant 1$) с закрепленной кромкой $x = 0$ и свободными сторонами $|y| = 1$. Решение получается наложением решения для квадранта, полученного в предыдущих частях работы (РЖМат, 1955, 2235, 2236), и решения для полуполосы со свободными кромками при отсутствии внешней нагрузки. Последнее ищется в виде ряда по собственным функциям

$$w_k(x, y) = e^{\lambda_k x}(\lambda_k \operatorname{ctg} \lambda_k - (1 + \nu)/(1 - \nu)\cos \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k y),$$

где λ_k — корни уравнения $\sin 2\lambda = 2\lambda(1-\nu)/(3+\nu)$, ν — коэффициент Пуассона. При $\nu = 1/4$ даются несколько первых корней и их асимптотическое выражение.

Излагается, кроме того, другой способ решения задачи, основанный на разложении решения в интеграл Фурье по переменной x. Авторы предполагают изложить детальное обсуждение результатов и численные расчеты в следующем сообщении. Я. С. Уфлянд

5850. **Общие замечания о распространении электромагнитных волн в движущихся средах. Лампариелло** (Considerazioni generali sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei corpi in moto. Lampariello Giovanni), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, 17, № 1-2, 37—44 (итал.)

Решается задача сведения с точностью до членов порядка $\beta^2 = v^2/c^2$ уравнений Максвелла — Минковского в движущихся средах к одному дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных. Уравнения поля при отсутствии токов и зарядов имеют вид:

$$\dot{\mathbf{B}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \dot{\mathbf{D}} = c \operatorname{rot} \mathbf{H}, \operatorname{div} \mathbf{D} = 0,$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}[\mathbf{vE}], \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}[\mathbf{vE}].$$

Они эквивалентны уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathbf{H} - \lambda[\mathbf{vE}]) = -c \operatorname{rot} \mathbf{E},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E} + \lambda[\mathbf{vH}]) = c \operatorname{rot} \mathbf{H}, \qquad (1$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E} + \lambda[\mathbf{vH}]) = 0, \operatorname{div}(\mu\mathbf{H} - \lambda[\mathbf{vE}]) = 0,$$

где $\lambda = (n^2 - 1)/c$, $n^2 = \varepsilon\mu$.

При помощи характеристического уравнения системы (1) получается искомое уравнение

$$n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + r(n^2 - 1)\,\mathbf{v} \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - c^2 \Delta\Phi = 0. \qquad (2)$$

В случае зависимости процесса только от x и t приведен вывод уравнения (2) для одной компоненты поля непосредственным исключением другой компоненты из системы (1). Это же уравнение получается из волнового преобразованием Лоренца.

Полученное уравнение для двух переменных применено для объяснения опыта Физо. П. П. Бирюлин

5851. **Дифракция волн у клина. Оберхеттингер** (Diffraction of waves by a wedge. Oberhettinger F.), Communs Pure and Appl. Math., 1954, 7, № 3, 551—563 (англ.)

Предлагается новый способ построения функции Грина двумерного уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ для клиновидной области при граничных условиях

первого и второго рода. Поле источника разлагается в интеграл по функциям Ганкеля с мнимым значком

$$H_0^{(2)}(kR) = -i\int_0^\infty e^{\pi\tau} H_{i\tau}^{(2)}(k\rho) H_{i\tau}^{(2)}(k\rho') \times \cdots \times \mathrm{ch}\,[(\pi - |\varphi - \varphi'|)\tau]\,d\tau, \quad (1)$$

где $H_\nu^{(2)}(z)$ — функция Ганкеля, $R^2 = (\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\varphi - \varphi')^{1/2}$. Вторичное поле строится в виде интеграла аналогичного типа из подходящих частных решений уравнения Гельмгольца. Путем преобразования найденного выражения получаются известные формулы, пригодные для представления функции Грина в различных частях рассматриваемой области.

В заключение автор приводит аналогичные выражения для функции Грина для соответствующих трехмерных краевых задач.

Примечание референта. Для сходимости разложения (1) и других интегралов, встречающихся в промежуточных вычислениях, необходимо считать k комплексным числом с достаточно большой отрицательной мнимой частью, однако окончательные формулы остаются справедливыми также и при вещественном k. Н. Н. Лебедев

5852. Мультиполи и волны Щелкунова. Феррари (Multipoli e onde di Schelkunoff. Ferrari Italo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, **17**, № 1-2, 32—37 (итал.)

Показывается, что поле электрического мультиполя порядка n является линейной комбинацией полей первых n собственных волн в сферической системе координат (автор называет эти волны волнами Щелкунова).

Магнитное поле волны номера n в точке с радиусом-вектором **OM** выражается формулой

$$\mathbf{H}^{(n)} = g_n(r)\,\frac{dP_{n+1}(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}\,[\mathbf{OM}\,\mathbf{k}],$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор оси z,

$$g_n(r) = \exp\left(-j\,\frac{\omega r}{c}\right) r^{-2} \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{(n+\nu+1)!}{\nu!\,(n+1-\nu)!\,(2j\omega r)^\nu c^{-\nu}}.$$

Магнитное поле мультиполя порядка n выражается через магнитное поле $\mathbf{H}_0$ диполя формулой

$$\mathbf{H}_n = \frac{\partial^n \mathbf{H}_0}{\partial z^n} = \frac{\partial^n F(r)}{\partial z^n}\,[\mathbf{OM}\,\mathbf{k}]$$

$$F(r) = f'(r)/r, \quad f(r) = j\omega\mathfrak{M}\exp\left(-j\,\frac{\omega}{c}\,r\right)\Big/4\pi r,$$

где $\mathfrak{M}$ — момент диполя, $\frac{\partial^n F(r)}{\partial z^n}$ и $\overline{P}_s = \frac{dP_{s+1}}{d(\cos\theta)}$ полиномы степени n относительно $\cos\theta$. Можно положить поэтому

$$\frac{\partial^n F(r)}{\partial z^n} = \sum_{s=0}^n c_s g_s \overline{P}_s.$$

Последнее равенство возможно, когда c_i удовлетворяют системе линейных уравнений, решение которой дает искомое разложение

$$\mathbf{H}_n = \sum_{s=0}^n c_s \mathbf{H}^{(s)}.$$

Приведена формула для вычисления коэффициентов разложения, вычислено несколько коэффициентов.

П. П. Бирюлин

5853. Решение задач дифракции электромагнитных волн на круглых дисках и отверстиях при помощи волновых векторных функций. II. Проблемы дифракции. Фламмер (The vector wave function solution of the diffraction of electromagnetic waves by circular disks and apertures. II. The diffraction problems. Flammer Carson), J. Appl. Phys., 1953, **24**, № 9, 1224—1231 (англ.)

Решается задача о дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечно тонком идеально проводящем диске диаметра d. Диск расположен так, что в системе координат сжатого сфероида (η, ξ, φ) характеризуется уравнением $\xi = 0$. На диск падает плоско поляризованная электромагнитная волна

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{e}_x E_0 e^{ikz}, \quad \mathbf{H}^i = \mathbf{e}_y H_0 e^{ikz}, \quad H_0 = (\varepsilon/\mu)^{1/2} E_0.$$

Согласно результатам первой части работы (РЖМат, 1955, 3235) волна может быть представлена в виде

$$\mathbf{e}_x E_0 e^{ikz} = E_0(k)^{-1}\left[\alpha\sum_{n=0}^\infty a_{0n}\,\mathrm{Me}_{0n}^{y(1)}(\eta,\xi,\varphi) + \beta\sum_{n=1}^\infty b_{1n}\,\mathrm{Me}_{1n}^{z(1)}(\eta,\xi,\varphi)\right],$$

$$\mathbf{e}_y H_0 e^{ikz} = -iH_0(k)^{-1}\left[\alpha\sum_{n=0}^\infty a_{0n}\,\mathrm{Ne}_{0n}^{y(1)}(\eta,\xi,\varphi) + \beta\sum_{n=1}^\infty b_{1n}\,\mathrm{Ne}_{1n}^{z(1)}(\eta,\xi,\varphi)\right],$$

где α и β — постоянные, $\alpha + \beta = 1$. Рассеянное электрическое поле (разность между полным полем и полем падающей волны) представляется в виде

$$\mathbf{E}^s(\eta,\xi,\varphi) = E_0 k^{-1}\left[\alpha\sum_{n=1}'^\infty A_{0n}\,\mathrm{Me}_{0n}^{y(3)}(\eta,\xi,\varphi) + \beta\sum_{n=1}'^\infty B_{1n}\,\mathrm{Me}_{1n}^{z(3)}(\eta,\xi,\varphi)\right],$$

где $A_{0n} = -a_{0n}R_{0n}^{(1)\prime}(-ic, i0)/R_{0n}^{(3)\prime}(-ic, i0)$;

$$B_{1n} = -b_{1n}R_{1n}^{(1)}(-ic, i0)/R_{1n}^{(3)}(-ic, i0).$$

(Штрихи над сферическими функциями означают дифференцирование по координатам, штрихи над знаком Σ — суммирование по нечетным значениям n). Рассеянная волна удовлетворяет условию излучения. Тангенциальная компонента полного электрического поля исчезает на поверхности диска. α и β определяются из условия, что на краю диска исчезает компонента E_φ полного поля, и тем самым доказывается единственность решения.

В плоскости диска, но вне его и вблизи его края

$$E_\rho = O(s^{-1/2})\cos\varphi, \quad E_\varphi = O(s^{1/2})\sin\varphi, \quad E_z = 0,$$
$$H_\rho = O(1)\sin\varphi, \quad H_\varphi = O(1)\cos\varphi,$$
$$H_z = O(s^{-1/2})\sin\varphi.$$

Здесь ρ — радиус кругового цилиндра, s — расстояние от края диска. Для малых дисков выражение для рассеянной волны в дальней зоне автор разлагает по степеням $kd/2$. Полученные выражения совпадают с результатами, полученными ранее другими методами (см., например, Meixner J., Andrejewski W., Ann. Physik, 1950, **7**, № 3—4, 157—168, а также Bouwkamp C. J., Philips Res. Rep., 1950, **5**, 401). Получены также формулы, решающие задачу дифракции плоской волны на диске при произвольном угле падения, а также задачу дифракции на отверстии при нормальном падении плоской волны. Последние формулы получены применением электромагнитной формы принципа Бабине.

Библиография, 18 названий. П. П. Бирюлин

5854. Об особых точках сигма-многозначных функций, связанных с осесимметричной магнитной задачей. Ламбин Н. В., Уч. зап. Белорус. ун-та, 1954, № 19, 27—31.

Выделяется главная часть двух известных сингулярных решений осесимметричной магнитной задачи. А. М. Родов

5855 К. **Дифференциальные уравнения с приложениями.** Бец (Differential equations, with applications. Betz Herman, 310 p., Harper, 1954, 4.50 doll.), Cumul Book Index, 1954, 57, № 5, 11 (библ.)

5856 К. **Задачи по уравнениям математической физики.** Смирнов М. М., Изд. 2-е дополн., 88 стр., М., Гостехиздат, 1954, 1 р. 85 к.

5857 Д. **Интегральные и дифференциальные уравнения поперечных колебаний вала с учетом сдвига и гигроскопического момента.** Овчинников П. Ф., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УкрССР, Одесса, 1955

См. также: 5534 К, 5535 К, 5617, 5730 К, 5744, 5751, 5760, 5762, 5886, 5900, 5916, 5962 Д, 6084, 6106

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5858. **Интегральные уравнения типа свертки.** Гахов Ф. Д., Черский Ю. И., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 2, 197—199

Исследуются особое интегральное уравнение вида

$$f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty k_1(x-t)f(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 k_2(x-t)f(t)\,dt=g(x) \qquad (1)$$

и парные уравнения вида

$$f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty k_1(x-t)f(t)\,dt=g(x),\quad 0<x<\infty,$$

$$f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty k_2(x-t)f(t)\,dt=g(x),\quad -\infty<x<0 \qquad (2)$$

в предположении, что ядра $k_1(x)$ и $k_2(x)$ удовлетворяют условию

$$k_j(x)\,e^{-yx}\in L(-\infty,\infty),\quad a_j\leqslant y\leqslant b_j,\quad j=1,2.$$

Искомые функции представляются в виде $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$, где $f_+(x)\equiv 0$ при $x<0$, а $f_-(x)\equiv 0$ при $x>0$. Функции $f_\pm(x)$ ищутся в классах функций, для которых $f_\pm(x)\,e^{-yx}\in L^2(-\infty,\infty)$, где y изменяется в некоторых промежутках, определяемых постоянными a_j, b_k; $j,k=1,2$.

Свободные члены уравнений выбираются из тех же классов, что и искомые функции.

Метод исследования заключается в приведении уравнений (1), (2) при помощи преобразования Фурье к краевым задачам аналитических функций. Используется следующее свойство преобразования Фурье: если $k(x)$ такова, что $k(x)\,e^{-yx}\in L(-\infty,\infty)$ или $L^2(-\infty,\infty)$, $a\leqslant y\leqslant b$, то ее преобразование $K(z)$ будет функцией, аналитической в области $a<\operatorname{Im} z<b$.

В зависимости от значений постоянных a_j, b_k получаются различные краевые задачи. Для уравнения (1) различаются два случая: I. $b_1>a_2$; II. $b_1<a_2$. Для уравнения (2) существенны случаи: III. $b_1<a_2$; IV. $\min(b_1,b_2)>\max(a_1,a_2)$; V. $b_2<a_1$.

Случаи I, III и IV приводятся к одной или двум краевым задачам Римана и решаются в замкнутом виде. В случаях II и V получается краевая задача, решение которой в общем виде еще неизвестно.

Случаи $b_1=a_2$ для уравнения (1) и $\min(b_1,b_2)=\max(a_1,a_2)$ для уравнений (2) приводятся к уравнениям, изученным ранее в работах И. М. Рапопорта (Сб. тр. Ин-та матем. АН УССР, 1949, № 12) и Ю. И. Черского (РЖМат, 1954, 5618). Л. А. Чикин

5859. **О решении уравнения Винера — Хопфа, основанном на использовании формальных свойств функций δ_+ и δ_-.** Лафлёр, Намиас (Sur la résolution de l'équation de Wiener-Hopf, basée sur l'utilisation des propriétés formelles des fonctions δ_+ et δ_-. Lafleur Ch., Namias V.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 40, № 8, 787—790 (франц.)

Уравнением Винера — Хопфа авторы называют неоднородное интегральное уравнение

$$\chi(t+\alpha)=\int_0^\infty k(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau,\quad t>0,$$

где $k(\tau)$ — искомая функция. В работе содержится замечание, что формулу для решения удобно записывать с помощью сингулярной функции $\delta_+(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{iut}\,dt$. Именно, если $X(u)$, $K(u)$, $\Phi(u)$ — преобразования Фурье функций $\chi(u)$, $k(u)$, $\varphi(u)$ и $\Phi(u)=\psi^+(u)\,\psi^-(u)$, причем $\psi^-(u)$ регулярна и не обращается в нуль в нижней полуплоскости, а ψ^+ в верхней, то

$$K(u)=\frac{1}{\psi^+(u)}\int_{-\infty}^\infty \frac{X(v)}{\psi^-(v)}\,e^{iv\alpha}\,\delta_+(u-v)\,dv.$$

Результат получается формальными преобразованиями, без строгого обоснования. Условий, при которых действительно имеется решение, даваемое этой формулой, в работе не содержится. Не выясняется также вопрос о единственности решения. Л. А. Дикий

5860. **Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.** Виграненко Т. И., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1954, 29; № 3, 31—41

В § 1 изучается решение интегро-дифференциального уравнения (и.-д. у.)

$$\sum_{i=1}^n X_i(P)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}=\lambda\int_D K(P,P_1)\,v(P_1)\,dP_1, \qquad (1)$$

где

$$v(P_1)=\sum_{i=1}^n Y_i(P_1)\,\frac{\partial u}{\partial y_i}+Y_{n+1}(P_1)\,u(P_1).$$

Решение уравнения (1) сведено к решению и.-д. у.

$$u=\psi(\psi_1,\ \ldots,\ \psi_{n-1})+\lambda\int_D N(P,P_1)\,v(P_1)\,dP_1, \qquad (2)$$

где: а) $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_{n-1}$ — независимые решения дифференциального уравнения $\sum_{i=1}^n X_i(P)\,\partial u/\partial x_i=0$;

б) ψ — произвольная функция; в) функция $N(P,P_1)$ строится с помощью функций $\psi_1(P), \ldots, \psi_{n-1}(P)$, $K(P,P_1)$, $X_n(P)$. Доказывается, что функция $N(P,P_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = K(P,P_1).$$

Применяя оператор v к обеим частям (2), автор получает интегральное уравнение Фредгольма

$$v(P) = f(P) + \lambda \int_D M(P, P_1)\, v(P_1)\, dP_1. \qquad (3)$$

Далее изучается связь между решениями уравнений (2) и (3).

В § 2 и -д. у.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(P) \frac{\partial u}{\partial x_i} + X_{n+1}(P)\, u(P) = \lambda \int_D K(P, P_1)\, v(P_1)\, dP_1$$

преобразуется в уравнение вида (1) посредством подстановки $u(P) = \omega(P)\, w(P)$, где $\omega(P)$ — частное решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + X_{n+1}\, u = 0.$$

В § 3 решается задача Коши: найти решение и.-д. у. (1), которое при $x_n = x_n^0$ обращается в заданную дифференцируемую функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

В § 4 решается задача Коши в следующей постановке: найти интегральную поверхность и.-д. у. (1), содержащую заданное $(n-1)$-мерное многообразие $x_k = \varphi_k(t_1, \ldots, t_{n-1})$ $u = \varphi(t_1, \ldots, t_{n-1})$.

Отметим, что изучение решений уравнений (2) посредством уравнения (3) для одномерного случая проведено в работе Бушама, опубликованной ранее (Buscham W., Z angew. Math. und Mech., 1952, 32, 20—21).

Я. В. Быков

5861. **Интегральное уравнение Урысона. Вайнберг М. М.**, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, 21, 49—64

П. С. Урысону принадлежит ряд теорем (Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, Гостехиздат, 1951, 45—76) о положительных решениях нелинейного уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K[x, y, \varphi(y)]\, dy.$$

Основные из этих теорем доказываются для случая, когда в уравнении интегрирование производится не по отрезку $[a, b]$, а по ограниченной области конечномерного евклидова пространства. Проверяется измеримость функций, фигурирующих в окончательных и промежуточных формулах.

Относительно характера нелинейностей в интегральном уравнении делаются те же предположения, что и в работе П. С. Урысона. Это позволяет без существенных изменений сохранить урысоновские доказательства.

М. А. Красносельский

5862. **О нелинейных интегральных уравнениях типа Гаммерштейна. Воскресенский Е. П.**, Тр. Воронежск. ун-та, 1954, 27, 75—78

Сформулирована следующая теорема:

Уравнение

$$\lambda\psi(x) = \int_{\mathscr{B}} K(x,y)\, f(\psi(y), y)\, dy \qquad (1)$$

имеет не менее счетного множества различных нетривиальных решений, если: 1) $K(x,y)$ является ядром типа Шмидта, т. е. $K(x,y) = A(x)\, B(y)\, S(x,y)$, где $S(x,y)$ — положительно определенное, симметрическое ядро с суммируемым квадратом, определенное в области $x \in \mathscr{B}$, $y \in \mathscr{B}$ ($\mathscr{B}$ — замкнутая область одного или большего числа измерений), $0 < a < A(x) < b$; $0 < c < B(x) < d$ при $x \in \mathscr{B}$ (a, b, c, d некоторые постоянные); 2) функция $f(u, y)$ непрерывна для $y \in \mathscr{B}$ и $-\infty < u < +\infty$ и удовлетворяет условиям: а) $uf(u, y) \geqslant 0$; б) $f(u,y) \equiv 0$ для всех $y \in \mathscr{B}$ тогда и только тогда, когда $u = 0$; в) $|f(h(y), y)| \leqslant \varphi(y)$, $\int_{\mathscr{B}} \varphi^2(y)\, dy < M^2$, какова бы ни была функция $h(x)$ с суммируемым квадратом.

При этом транспонированное уравнение

$$\lambda\psi(x) = \int_{\mathscr{B}} K(y, x)\, f(\psi(y), y)\, dy$$

имеет также не менее счетного множества нетривиальных решений.

Подробно изложена схема доказательства теоремы.

Отметим, что теорема остается верной, если несколько ослабить условие 2) теоремы.

Если ввести в рассмотрение функции $f_1(u,x) = B(x)\, f(u,x) / A(x)$, $K_1(x,y) = S(x,y)\, A(x)\, A(y)$, то уравнение (1) можно записать в виде

$$\lambda\psi(x) = \int_{\mathscr{B}} K_1(x, y)\, f_1(\psi(y), y)\, dy. \qquad (1')$$

$K_1(x, y)$ — положительное ядро. В самом деле,

$$\int_{\mathscr{B}}\int_{\mathscr{B}} K_1(x, y)\, h(x)\, h(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{\mathscr{B}}\int_{\mathscr{B}} S(x, y)\, [A(x)\, h(x)]\, [A(y)\, h(y)]\, dx\, dy \geqslant 0$$

для любой суммируемой с квадратом функции $h(x)$ в силу положительности ядра $S(x, y)$.

Существование не менее счетного числа нетривиальных решений уравнения (1′) доказано М. М. Вайнбергом без требования выполнимости условий а) и б) в 2).

Я. В. Быков

5863. **О нелинейном интегральном уравнении второго рода с сильной сингулярностью. Погожельский** (Sur l'équation intégrale non linéaire de seconde espèce à forte singularité Pogorzelski W.), Ann. polon. math., 1954, 1, № 1 138—148 (франц.)

Рассмотрено нелинейное сингулярное интегральное уравнение с интегралом в смысле главного значения по Коши

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^a N(x, y)\, F[x, y, \varphi(y)]\, dy, \qquad (1)$$

где $\varphi(x)$ — искомая функция в интервале $(0,a)$, $N(x,y) = P(x,y) \operatorname{ctg} \pi a^{-1}(x-y) + Q(x,y)$, а известные функции $f(x)$, $P(x, y)$, $Q(x,u)$, $F(x,y,u)$ удовлетворяют следующим условиям: $f(x)$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ голоморфны, когда точки x, y принадлежат полосе D, внутри которой находится вещественная ось и которая ограничена двумя параллельными прямыми. Функция $F(x, y, u)$ голоморфна, когда x, $y \in D$ и $|u| \leqslant R$. Кроме того, предполагается, что все эти функции имеют вещественный период a по переменным x и y.

Методом последовательных приближений автор показывает, что при достаточно малом $|\lambda|$ уравнение (1) имеет единственное решение, голоморфное в не-

которой подполосе полосы D, и указывает, что этим же методом можно изучить уравнения вида

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_C (x-y)^{-1} F[x, y, \varphi(y)]\, dy,$$

а также определенные системы таких уравнений, где C — простая замкнутая гладкая кривая, а функции удовлетворяют аналогичным условиям.

Повидимому, автору неизвестны работы А. И. Гусейнова, в которых подобные вопросы изучены при более общих условиях (см., например, Гусейнов А. И., Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, 12, № 2, 193—212).

Б. В. Хведелидзе

5864. **О нелинейных интегральных уравнениях в интегралах Стильтьеса. Щелкунов В. А.,** Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 54, 69—74

Рассматривается нелинейное интегральное уравнение в интегралах Стильтьеса

$$u(x) = \lambda \int_{(E)} k(x, \omega) f[\xi, u(\xi)]\, d\omega, \qquad (1)$$

где E — совокупность конечного числа непересекающихся сегментов, а $k(x, \omega)$ — заданная средняя аддитивная функция области (ω) и параметра x (Гюнтер Н., Тр. Физ.-матем. ин-та им. Стеклова, 1932, 1). Уравнение вида (1) является обобщением обычного уравнения Гаммерштейна с римановым интегралом по отрезку.

Указаны достаточные условия, при которых решение уравнения (1), стремящееся к нулю при $\lambda \to 0$, может быть получено в виде ряда по степеням λ (для случая уравнения с римановым интегралом см. Назаров Н. Н., Тр. Среднеаз. ун-та, 1941, сер. 5, мат. вып. 33).

М. А. Красносельский

5865. **Нелокальные теоремы существования решений у систем нелинейных интегральных уравнений. Поволоцкий А. И.,** Докл. АН СССР, 1954, 99, № 6, 901—904

Рассматривается система

$$\varphi_i(x) = \lambda \int_G K(x, y) f_i[y, \varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y)]\, dy \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

с симметричными ядрами K_i. Вещественные функции вещественных аргументов $f_i(x, z_1, \ldots, z_n)$ считаются измеримыми по $x \in G$ и непрерывными по $(z_1, \ldots, z_n)$. Нелокальными теоремами существования решений названы такие, в которых утверждается существование решения системы (1) для всякого λ, удовлетворяющего одному из условий: $\lambda < b$ либо $\lambda > a$, где a и b — постоянные. Для исследования системы (1) рассматривается пространство вектор-функции $L_{\{p\}}$ — прямая сумма пространств L^{p_1}, L^{p_2}, ..., L^{p_n}, где $p_i > 1$; если все $p_i = 2$, то $L_{\{p\}} = L_{\{2\}}$.

Теорема 7. Пусть выполнены условия:

1) $K_i(x, y)$ — ограниченные симметричные ядра, определяющие в $L_{\{2\}}$ вполне непрерывный оператор;

2) $K_i(x, y)$ — положительно определенные ядра;

3) $f_k(x, z_1, \ldots, z_n)\, z_k \leqslant a_k z_k^2 + b_k(x) |z_k|^{2-\gamma_k} + c_k(x)$, где $0 < \gamma_k < 2$, $b_k(x) \in L^{2/\gamma_k}$, $c_k(x) \in L^1$;

4) $-\infty < \lambda < \min_{(i)} (1/a_i\lambda_i)$,

где λ_i — наибольшее собственное число ядра $K_i(x, y)$;

5) $f_k(x, z_1, \ldots, z_n) \leqslant F(z_1, \ldots, z_n)$ $(k = 1, \ldots, n)$, где F — непрерывная по совокупности аргументов функция. Тогда система (1) имеет по меньшей мере одно ограниченное решение.

Теорема 8. Если выполнены условия 1) и 5), а условия 2) —4) заменены следующими:

2′) $K_i(x, y)$ имеют конечное число положительных собственных чисел;

3′) $f_k(x, z_1, \ldots, z_n)\, z_k \geqslant a_k z_k^2 - b_k(x) |z|^{2-\gamma} - c_k(x)$, где a_k, b_k, c_k, γ удовлетворяют условию 3);

4′) $\max_{(i)} (1/a_i\lambda_i) < \lambda < +\infty$,

где λ_i — наименьшее положительное собственное число ядра $K_i(x, y)$, — то система (1) имеет по меньшей мере одно ограниченное решение.

Сформулированы предложения и для случая неограниченных ядер K_i. Доказательства отсутствуют.

Примечание референта. Содержащаяся в работе теорема 6 неверна. Можно построить опровергающие ее примеры. Опровергается примерами и другое утверждение работы, что при выполнении неравенства (10) работы оператор f действует из $L_{\{p\}}$ в $L_{\{p'\}}$. В действительности имеет место следующее предложение: для того чтобы оператор f действовал из $L_{\{p\}}$ в $L_{\{p'\}}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$|f_k(x, z_1, \ldots, z_n)| \leqslant a_k(x) + \sum_{i=1}^n a_{ik} |z_i|^{r_{ik}},$$

где a_{ik} — некоторые постоянные и $r_{ik} = p_i / p_k'$, которое (как и теорема 5 реферируемой работы) непосредственно следует из предложений, найденных референтом (РЖМат, 1954, 2230).

М. М. Вайнберг

5866. **О существовании и единственности решений системы нелинейных интегральных уравнений и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Кодя-ха** (兩種非線性積分方程組的存在定理. 高載河), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, 4, № 4, 387—394 (кит.; резюме русс.)

Рассмотрены системы интегральных уравнений вида

$$y_i(x) = f_i(x, \lambda_{i1} \int_a^b |x-t|^{-\alpha_{i1}} K_{i1}(x, t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\, dt, \ldots$$
$$\ldots, \lambda_{im_i} \int_a^b |x-t|^{-\alpha_{im_i}} K_{im_i}(x, t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\, dt) \qquad (1)$$
$$(\alpha_{ik_i} < 1;\ k_i = 1, 2, \ldots, m_i;\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

и интегро-дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d^{m_i} y_i}{dx^{m_i}} = F_i(x, y_1(x), \ldots, y_1^{(m_1-1)}(x), \ldots$$
$$\ldots, y_n(x), \ldots, y_n^{(m_n-1)}(x),$$
$$\int_a^c |x-t|^{-\alpha_{i1}} R_{i1}(x, t, y_1(t), \ldots, y_n^{(n_n)}(t))\, dt, \ldots$$
$$\ldots, \int_a^c |x-t|^{-\alpha_{il_i}} R_{il_i}(x, t, y_1(t), \ldots, y_n^{(n_n)}(t))\, dt) \qquad (2)$$
$$(\alpha_{ip_i} < 1;\ p_i = 1, 2, \ldots, l_i;\ m_i \geqslant n_i + 1;$$
$$i = 1, 2, \ldots, n).$$

Предполагается, что функции $f_i(x, z_{i1}, \ldots, z_{im_i})$, $K_{ik_i}(x, t, y_1, \ldots, y_n)$, $F_i(x, y_{11}, \ldots, y_{nm_n}, z_{i1}, \ldots, z_{il_i})$ и $R_{ip_i}(x, t, y_{11}, \ldots, y_{nn_n+1})$ в некоторых областях непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют по y-м и z-м условию Липшица.

Указаны условия, при выполнении которых из принципа сжатых отображений вытекает существование и единственность непрерывных решений у систем (1) и (2).

М. А. Красносельский

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5867. **Решение задачи об отражении звуковых волн от жесткой плоскости, имеющей деформируемую часть.** Рахматулин Х. А., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 5, 573—584

Решается задача об отражении плоской звуковой волны с фронтом, перпендикулярным оси oz, от плоскости $z=0$ в предположении, что с момента $t=0$ полоса $-l\leqslant x\leqslant l$ плоскости $z=0$ деформируется с известной скоростью $v_z=f(x,t)$. В случае поршня (т. е. $f(x,t)=f(t)$) в предположении, что действующая извне на поршень сила есть линейная функция скорости поршня, для последней получается интегро-дифференциальное уравнение, решение которого сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами последовательно для промежутков $2l(n-1)/a\leqslant t\leqslant 2ln/a$ $(n=1,2,\ \ldots)$. Х. Л. Смолицкий

5868. **Строгое решение задачи о собственных значениях для изгибаемого стержня.** Дёйкер (Die strenge Lösung der Eigenwertaufgabe für den Kippstab. Deuker E. A.), Ingr.-Arch., 1953, 21, № 5—6, 399—408 (нем.)

Упругий стержень длины l, закрепленный в точке $s=l$, подвергается действию сжимающей силы P, приложенной в точке $s=0$ вдоль главной оси. Вопрос о форме изогнутой оси стержня сводится к вариационной задаче

$$U=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}\left(K_4\dot{\omega}_1^2+\sum_{i=1}^{3}K_i\omega_i^2\right)-Pl^2\cos q_3\sin q_3\right\}ds=\min$$

при связях

$$\dot{q}_1+\dot{q}_2\cos q_3-\omega_1=0,$$

$$-\dot{q}_2\cos q_1\sin q_3+\dot{q}_3\sin q_1-\omega_2=0,$$

$$\dot{q}_2\sin q_1\sin q_3+\dot{q}_3\cos q_1-\omega_3=0.$$

Здесь q_i — углы Эйлера, а K_i — упругие постоянные стержня (точкой обозначено дифференцирование по s). Уравнения экстремалей составляются с помощью множителей Лагранжа λ_i. Получается система 9 уравнений с 9 неизвестными ω_i, q_i, λ_i. Из условий закрепления вытекают граничные условия для $s=0$ и $s=1$. Затем автор рассматривает случай чистого изгиба и получает известное решение через эллиптический интеграл. Для этого случая вычисляется вторая вариация потенциальной энергии и с помощью условия $\delta^2U=\mathrm{extr}$ выводятся уравнения для вариаций $\delta\omega_1$ и $\delta\lambda_1$. Полученная система линейных дифференциальных уравнений дополняется граничными условиями. В результате возникает однородная краевая задача, определяющая критические размеры и нагрузку. Автор вводит параметры $K_1/K_3=\nu^2$, $K_2/K_3=\mu$ и приводит краевую задачу к однородному интегральному уравнению типа Фредгольма с ядром, зависящим от параметров ν и μ. В заключение рассматривается приближенная теория ($ds\cong dx$) для того же случая чистого изгиба. С помощью представления ядра в виде

$$\sum_{\rho=1}^{\infty}\sum_{\sigma=1}^{\infty}a_{\rho\sigma}\sin\rho\pi x\sin\sigma\pi y$$

определяются приближенно первые характеристические числа. И. С. Аржаных

См. также: 5817, 5821 К, 5845, 6007

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5869. **Изучение функционала $\int_L\rho^\alpha\,ds$.** Бертолини (Studio del funzionale $\int_L\rho^\alpha\,ds$. Bertolini Fernando), Univ. Roma. Ist. naz. alta mat. Rend. mat. e appl., 1953, 12, № 90—104 (итал.)

Подробно рассматривается в пространстве (x,y,z) задача для интеграла $\int(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{1/2}dt$ при фиксированных граничных точках. Для $\alpha>-2$ минимум достигается, тогда как для $\alpha\leqslant-2$ это не всегда так. Указывается явная форма решения, когда оно существует. W. H. Fleming

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 541.

5870. **Максимизация отдачи ограниченных источников.** Файт (Maximization of return from limited resources. Fite Wade L.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1953, 1, 73—90 (англ.)

Изучается проблема максимума интеграла $\int F(x)\times$ $\times S(D(x))\,dx$ при $\int D(x)\,dx=\mathrm{const}$ и $D(x)\geqslant 0$. Функция $S(D)$ берется возрастающей, выпуклой для $D<D_p$ и вогнутой для $D>D_p$. Как отмечает автор, доказательства эвристические. Автор получает необходимые условия для решения методами, которые он называет «грубыми и неудовлетворительными». Тем не менее условия корректны и являются необходимыми. Работа была бы значительно упрощена, если учесть, что $S(D)$ может быть заменена вогнутой функцией, получаемой проведением касательных к выпуклым частям графика. Задача для вогнутой функции нетрудна, однако ее решение опубликовано в обширной литературе, обычно недоступной.

Предыдущие замечания о сведении общей задачи к задаче с вогнутой функцией основаны на некоторых результатах Янга (Young L. C., Acta math., 1938, 69, 229—258). Автор применяет свои результаты к задаче распределения данного количества ядохимиката на поле хризантем так, чтобы убить наибольшее число хризантемных тлей. J. M. Danskin

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 541.

5871. **О минимальности вариационных принципов классической механики системы.** Блок (On the minimality of the variational principles of classical particle mechanics. Block H. D.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 3, 161—168 (англ.)

Рассматривается функционал

$$I(\zeta)=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}\sum_1^N m_i\dot{\zeta}_i^2-V(\zeta,\dot{\zeta},t)+\right.$$

$$\left.+\sum_1^s\lambda_\sigma f^\sigma(\zeta,\dot{\zeta},t)+\sum_1^N F_i\zeta_i\right]dt \qquad (1)$$

и ставится вопрос об условиях его минимума (условия стационарности этого функционала совпадают, по мнению автора, с уравнениями движения механической системы под действием сил с «потенциалом» V с учетом реакций связей $f^\sigma=0$ и дополнительных сил F_i). С

той же точки зрения рассмотрены функционалы

$$K(\zeta, \pi) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_1^N \left(\pi_i \dot{\zeta}_i - \frac{\pi_i^2}{2m_i} \right) - V(\zeta, t) \right] dt \quad (2)$$

(видоизмененный принцип Гамильтона) и

$$G(\xi, \psi) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_1^N \left(\psi_i \dot{\xi}_i - \frac{\psi_i^2}{2m_i} \right) - V(\xi) + h \right] dt, \quad (3)$$

причем в последнем случае имеется в виду интеграл энергии.

Доказаны три теоремы, устанавливающие достаточные условия положительности или отрицательности второй вариации. При доказательстве вместо функционалов (1) — (3) вводятся некоторые функции $\omega(\varepsilon)$ (параметр ε не зависит от t и изменяется в отрезке $[0,1]$) так, чтобы при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$ функция ω обращалась в соответствующие интегралы, вычисленные для действительного движения. Так, например, в случае функционала (2) $\omega(\varepsilon) \equiv K(x + \varepsilon\alpha,\ p + \varepsilon\beta)$. Затем вычисляется величина второй производной $\omega''(\varepsilon)$ и исследуется ее знак с помощью двух элементарных лемм, доказанных в начале работы. И. С. Аржаных

См. также: 5697, 5797, 5802, 5811, 5818, 5830, 5868

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

5872. **Элементарные трансцендентные функции.** **Эберлейн** (The elementary transcendental functions. Eberlein W. F.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 6, 386—392 (англ.)

Пусть

$$x = \cos\theta; \quad y = \sin\theta \quad (1)$$

(соответственно $x = \operatorname{ch}\theta$, $y = \operatorname{sh}\theta$);

$$x = (1 - t^2)/(1 + t^2); \quad y = 2t/(1 + t^2); \quad -\infty < t < \infty \quad (2)$$

(соответственно $x = (1 + t^2)/(1 - t^2)$; $y = 2t/(1 - t^2)$, $-1 < t < 1$);

$$\theta = 2\int_0^t (1 + u^2)^{-1} du = \varphi(t); \quad -\infty < t < \infty \quad (3)$$

соответственно $\theta = 2\int_0^t (1 - u^2)^{-1} du = \psi(t)$; $-1 < t < 1$).

Автор утверждает, что совокупности формул (1), (2 и (3) достаточно для аналитического определения круговых (соответственно гиперболических) функций:

$$\cos\theta = \{1 - [\varphi^{-1}(\theta)]^2\} / \{1 + [\varphi^{-1}(\theta)]^2\};$$

$$\sin\theta = 2\varphi^{-1}(\theta) / \{1 + [\varphi^{-1}(\theta)]^2\}.$$

Здесь $\varphi^{-1}(\theta)$ — функция, обратная к $\varphi(t)$. В. К. Дзядык

5873. **О порождении преобразования на замкнутой кривой бесконечно малым преобразованием.** **Финци** (On the generating of a transformation on a closed curve by an infinitesimal transformation. Finzi Arrigo), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 100—101 (англ.)

Пусть никакая степень преобразования T: $x_1 = g(x)$ ($g'(x) > 0$) замкнутой кривой в себя не имеет неподвижных точек. Тогда, вообще говоря, T порождается бесконечно малым преобразованием $Xf = \xi(x)\, df/dx$; для этого достаточно, чтобы g'' удовлетворяла условию Липшица и чтобы члены разложения модуля T (аналог осредненного числа полных оборотов при преобразовании T) в цепную дробь не слишком быстро возрастали. Доказательства отсутствуют. А. Д. Мышкис

5874. **Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и ее приложение к исследованию конечной системы линейных неравенств.** **Рубинштейн Г. Ш.**, Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 4, 627—630

В n-мерном евклидовом пространстве рассматриваются: конечное множество A, состоящее из m данных точек $a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$; две точки $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ и $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, многогранник M — выпуклая оболочка множества A и ось $B = \{b = c + \lambda d\}_{\lambda \in (-\infty, \infty)}$, определяемая точками c и d. Задача о крайней точке пересечения оси B с многогранником M заключается в отыскании гиперплоскости H_0, обладающей свойствами: 1) если $B \cap M \neq \Lambda$ (Λ — пустое множество), то H_0 строго отделяет от многогранника M луч $\{b = b_0 + \lambda d\}_{\lambda > 0}$ ($b_0 = c + \lambda_0 d$, где $\lambda_0 = \max\limits_{c + \lambda d \in M} \{\lambda\}$, т. е. b_0 — крайняя точка пересечения $B \cap M$), причем $H_0 \cap \{b_0 + \lambda d\}_{\lambda > 0} = \Lambda$; в этом случае (когда $B \cap M \neq \Lambda$), кроме гиперплоскости H_0, ищут еще вершины $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} \in A$ симплекса, внутри которого лежит точка b_0; 2) если же $B \cap M = \Lambda$, то H_0 строго отделяет B от M.

Для получения искомой гиперплоскости H_0 приводится конечный алгорифм, представляющий некоторую комбинацию метода разрешающих множителей Л. В. Канторовича (Математические методы в организации и планировании производства, Ленингр. ун-т, 1939) с двойственным аналогом алгорифма референта (Докл. АН СССР, 1951; **79**, № 4, 561; РЖМат, 1954, 2350).

Показывается, что задача исследования конечной системы линейных неравенств

$$\alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{in-1}\xi_{n-1} \leqslant \alpha_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (1)$$

приводится к частному случаю задачи о крайней точке, если в последней положить $A = \{a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})\}_{i=1,2,\ldots,m}$, $c = (0, 0, \ldots, 0)$, $d = (0, 0, \ldots, -1)$, тогда $B = \{b = (0, 0, \ldots, -\lambda)\}_{\lambda \in (-\infty, \infty)}$. Оказывается, если $B \cap M = \Lambda$, то система (1) разрешима при любых правых частях, направляющие коэффициенты гиперплоскости H_0 при этом позволяют вычислить само решение. Если же $B \cap M \neq \Lambda$, то система (1) разрешима при $\lambda_0 = \max\{\lambda\} \leqslant 0$ и несовместна при $\lambda_0 > 0$, причем $\lambda d \in M$

$$\lambda_0 = \min_{x = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})} \max_i (\alpha_{i1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{in-1}\xi_{n-1} - \alpha_{in}). \quad (2)$$

При совместности системы (1) $|\lambda_0|$ называется устойчивостью ее разрешимости, а при несовместности этой системы λ_0 — ее минимальное уклонение; направляющие коэффициенты гиперплоскости H_0 позволяют при этом вычислить наилучшее решение или приближение системы, т. е. такое $x_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_{n-1}^0)$, при котором в (2) достигается минимум. Если $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \in A$ — вершины симплекса, внутри которого расположена точка b_0, то подсистема

$$\alpha_{i1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{in-1}\xi_{n-1} \leqslant \alpha_{in} \quad (i = i_1, i_2, \ldots, i_k) \quad (3)$$

совместна или несовместна одновременно с системой (1) и имеет одинаковую с ней устойчивость разрешимости,

соответственно — минимальное уклонение, а множество наилучших решений, соответственно приближений, системы (1) содержится в с ответствующем множестве системы (3), причем ни одна подсистема системы (3) уже этими свойствами не обладает. С. И. Зуховицкий

5875. **Об одном неравенстве Ф. Рисса и нескольких аналогичных неравенствах. Бернацкий** (Sur une inégalité de F. Riesz et sur quelques inégalités analogues. Biernacki Mieczysław), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1952, **A6**, 79—89 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.; резюме польск., русс.)

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел.

Теорема 1. Если существует число K такое, что для произвольных натуральных m и $n>m$ выполнено неравенство

$$(a_m+\ldots+a_n)/(n-m)\leqslant Ka_m, \qquad (1)$$

то $a_n=O(n^{1-1/K})$.

Эта теорема усиливает результат Ф Рисса (Riesz F., Acta scient. math. (Szeged, Hungaria), 1948, **11**, 193—200), который при тех же самых условиях доказал, что $a_n=O(n/\lg n)$.

Теорема 2. Если в неравенстве (1) среднее арифметическое заменено на среднее арифметическое второго порядка, т. е. если выполнено неравенство

$$\frac{(n-m)\,a_{m+1}+(n-m-1)a_{m+2}+\ldots+2a_{n-1}+a_n}{2(n-m)(n-m+1)}\leqslant Ka_m,$$

то $a_n=O(n^{2-2/K})$.

Теорема 3. Если существует число K такое, что для каждого натурального n

$$a_{n+1}\leqslant K(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n,$$

и если $0<K\leqslant 1$ или же $2\leqslant K$, то $a_n\leqslant n^{K-1}a_1$.

Автор дает обобщения теоремы 3 (например, на средние арифметические второго порядка) и их приложения к теории аналитических функций. K. Tatarkiewicz

5876. **Обобщение одного неравенства Харди, Литтльвуда и Пойа. Собел** (On a generalization of an inequality of Hardy, Littlewood, and Pólya. Sobel Milton), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 596—602 (англ.)

Даны две системы действительных чисел:

$$A=\{a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n\},\ B=\{b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_n\}.$$

Пусть $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$, где $n_l\geqslant 1$ — целые числа, $l=1,2,\ldots,k$,

$$A_1=\{a_1,\ldots,a_{n_1}\},\ A_2=\{a_{n_1+1},\ldots,a_{n_2}\},\ldots$$
$$\ldots,A_k=\{a_{n-n_k+1},\ldots,a_n\}.$$

Рассматриваются $R=n!/C$, $C=n_1!\ n_2!\ldots n_k!$, всевозможных разбиений системы B на k подсистем, причем под разбиением понимается упорядоченная последовательность подсистем

$$P^*=\{B_1^*,\ B_2^*,\ldots,\ B_k^*\}.$$

Тогда $n!$ сумм

$$v_{cr}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_{j_i},$$

где $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ пробегает все перестановки индексов $(1,2,\ldots,n)$, разбиваются на R классов по C сумм в каждом, соответствующих R разбиениям системы B, так что в сумме v_{cr} при фиксированном r встречаются только произведения элементов из A_l на элементы из соответствующего B_l^*.

Доказывается теорема: При любом упорядочении разбиений: $P^1>P^2>\ldots>P^{R-1}>P^R$, где

$$P^1=\{B_1^1,\ B_2^1,\ldots,B_k^1\},$$

причем

$$B_1^1=\{b_1,\ldots,b_{n_1}\},\ B_2^1=\{b_{n_1+1},\ldots,b_{n_2}\},\ldots$$
$$\ldots,B_k^1=\{b_{n-n_k+1},\ldots,b_n\},$$

а

$$P^R=\{B_1^R,\ B_2^R,\ldots,B_k^R\},$$

причем

$$B_1^R=B_k^1,\ B_2^R=B_{k-1}^1,\ldots,\ B_k^R=B_1^1,$$

существует прямоугольная таблица с R строками и C столбцами, элементами которой являются суммы v_{cr}, такая, что при $P^{r_1}>P^{r_2}$ $v_{cr_1}\geqslant v_{cr_2}$ для всех $c=1,2,\ldots,C$.

Частным случаем этой теоремы является известное неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_ib_{j_i}\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n-i+1}.$$

В. И. Левин

5877. **О последовательностях, определяемых уравнением** $x_\nu=\varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\ldots(\varepsilon_\nu f(0))\ldots))$. **Байрактаревич** (О низовима дефинисаним једначином $x_\nu=\varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\ldots(\varepsilon_\nu f(0))\ldots))$. Бајрактаревић Махмуд), Зб. радова Српска АН, 1953, **35**, № 3, 61—74 (серб.; резюме франц.)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает в строгом смысле на $[-a, a]$, причем $f(-a)=-b\geqslant 0$, $f(x)>x$ при $|x|<a$, $f(a)=a$. Числу $z\in[0,2]=I$, представленному в виде

$$z=\sum_{\nu=0}^{\infty}d_\nu 2^{-\nu}, \qquad (1)$$

где $d_\nu=0$ или 1, сопоставляется последовательность

$$x_\nu=\varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\ldots(\varepsilon_\nu f(0))\ldots))\quad(\nu=1,2,\ldots), \qquad (2)$$

где числа $\varepsilon_\nu=\pm 1$ и определяются формулами:

$$\varepsilon_0=1-2d_0,\quad \varepsilon_\nu=(1-2d_\nu)/(1-2d_{\nu-1})\quad(\nu=1,2,\ldots).$$

Для чисел вида $z=p/2^q$ $(0<p<2^{q+1},\ q\geqslant 0,\ p$ и q — целые) выбирается любая из возможных последовательностей.

Автор изучает свойства функций $\xi_1(z)=\underline{\lim}_{\nu\to\infty}x_\nu$ и $\xi_2(z)=\overline{\lim}_{\nu\to\infty}x_\nu$, определяемых последовательностью (2). Доказываются следующие предложения: A) Функции $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ однозначно определены при $z\in I$ и являются единственными предельными точками последовательности (2); B) $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ монотонно убывают от a до $-a$, так что $a\geqslant\xi_2(z)\geqslant\xi_1(z)>\xi_2(z_1)\geqslant\xi_1(z_1)\geqslant-a$ при $0\leqslant z<z_1\leqslant 2$; C) $\xi_1(2-z)+\xi_2(z)=0$; D) $\xi_1(z)$ непрерывна справа при $0\leqslant z<2$ и $\xi_2(z)$ непрерывна слева при $0<z\leqslant 2$. Следовательно, если $\xi_1(z)=\xi_2(z)$ при $0\leqslant z\leqslant 2$, то эти функции непрерывны на I; причем в этом случае $f(-a)=0$. E) Если $\xi_2(z)>\xi_1(z)$ хотя бы в одной точке $z\in I$, то точки разрыва функций $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ образуют плотное несчетное множество. Таким образом, для сходимости последовательности (2) $(\xi_1(z)=\xi_2(z))$ необходимо и достаточно, что

...я функция $\xi_1(z)$ была бы непрерывна на I. Дается ...д условий, частью необходимых, частью достаточных, ...обы $\xi_1(z)$ была бы непрерывна на I. Рассматриваются ...которые конкретные примеры. Реферируемая работа ...римыкает к прежним исследованиям автора (РЖМат, ...55, 1329).

Для частного случая $f(x)=\sqrt{2+x}$ сходимость после...вательности вида (2) изучалась Полиа и Сеге (Полиа, ...еге, Задачи и теоремы из анализа, 1937, М.—Л., ч. 1, ...гл. 1, гл. 4, задачи 183—185) и др. Б. П. Демидович

8878. **Асимптотические разложения A-суммируемых линейных функционалов. Альянчич** (О асимптотском раз...ијању A-збирљивих линеарних функционела. Аљанчић Слободан), Зб. радова Српска АН, 1953, 35, № 3, 157—212 (серб., резюме нем.)

Пусть $q_\mu(\lambda)/q_{\mu+1}(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$ и $q_\mu(\lambda)\neq 0 (\mu=0,1,\ldots)$. Пусть

$$\varphi(t;\lambda)=\frac{p_0(t)}{q_0(\lambda)}+\frac{p_1(t)}{q_1(\lambda)}+\ldots+\frac{p_l(t)}{q_l(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

где коэффициенты $p_\mu(t)$ принадлежат к классу Ω_h^m функций $F(t)$, представимых в виде

$$F(t)=\omega_0(t)\pi_m(t)+\omega_1(t)\pi_{m-1}(t)+\ldots+\omega_m(t)$$

с периодическими $\omega_\mu(t)$ (одного и того же периода $h>0$), причем $\pi_\mu(t)$ — многочлен степени μ. Пусть далее существует такое целое $K>m$, что либо:

1) вариация

$$W_0^\infty\{\Delta_h^K\varphi(t;\lambda)\}=o(1/q_l(\lambda)),\quad \lambda\to\infty,$$

где

$$\Delta_h^k\varphi=\varphi(t)-C_k^1\varphi(t+h)+\ldots+(-1)^k\varphi(t+hk),$$

либо

2) вариация

$$W_0^T\{\Delta_h^K\varphi(t;\lambda)\}<M/q_l(\lambda),$$

где M не зависит от λ и $\Delta_h^K\varphi(t;\lambda)$ монотонно стремится к нулю при $t\to\infty$.

Тогда для любой функции $\psi(t)$, представимой в виде

$$\psi(t)=\int_0^\infty e^{-tu}\,d\alpha(u),$$

где $\alpha(u)$ — функция ограниченного изменения на интервале $(0,\infty)$, существуют пределы:

$$\lim_{\sigma\to 0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,d\varphi(t;\lambda)=g(\tau;\lambda),$$

$$\lim_{\sigma\to 0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,dp_\mu(t)=P_\mu(\tau),\quad \mu=0,1,\ldots,l,$$

если только $\tau\neq 2s\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$, причем равномерно относительно τ в любом сегменте, не содержащем точек $2s\pi/h$, имеет место соотношение

$$g(\tau;\lambda)=\frac{P_0(\tau)}{q_0(\lambda)}+\frac{P_1(\tau)}{q_1(\lambda)}+\ldots+\frac{P_l(\tau)}{q_l(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty.$$

Аналогичная теорема имеет место и для рядов, в частности для A-суммируемых тригонометрических рядов (Karamata J., Publ. Inst. Math. de l'Acad Serbe sci., 1952, 4, 69—88). Показывается, как теоремы рассмотренного типа позволяют находить асимптотические разложения специальных функций из асимптотических разложений их производящих функций. В качестве одного из примеров приводятся три различных асимптотических разложения ультрасферических полиномов. Еще одним примером может служить разложение

$$\int_0^\infty e^{i\tau t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{t}{2x}\right)^{\nu-1/2}dt=$$

$$=(-i\tau)^{-\nu-1/2}\sum_{\mu=0}^{l}C_{\nu-1/2}^{\mu}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1/2)}{(-2i\tau x)^\mu}+o(x^{-l}),\quad x\to\infty$$

справедливое при $-1/2<\nu<1/2$ и $|\tau|\geqslant\varepsilon>0$. В. И. Левин

5879. **Об асимптотическом поведении последовательностей, определенных рекуррентными соотношениями. Карамата** (О асимптотском понашању низова дефинисаних рекурентним релацијама. Карамата Јован), Зб. радова Српска АН, 1953, 35, № 3, 45—60 (серб.; резюме нем.)

Обобщая известный результат об итерированном синусе ($\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin_n x=\sqrt{3}$, $\sin_n x=\sin(\sin_{n-1}x)$, $\sin_1 x=\sin x>0$), автор доказывает следующую теорему: пусть $f(x)$ определена в окрестности точки $x=+0$, причем $f(x)=x-a(x)x^kL(x)$, где $a(x)\to a>0$ при $x\to+0$, $k>1$ и $xL'(x)=o\{L(x)\}$ $(x\to+0)$ и $L(x)>0$; пусть, далее, $x_0>0$ выбрано настолько малым, что для $0<x\leqslant x_0$ $f(x)>0$ и для любого ξ $0<\xi<x_0$,

$$\inf_{\xi\leqslant x\leqslant x_0}\{x-f(x)\}>0.$$

Тогда при $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=0,1,2,\ldots$, имеет место асимптотическое соотношение

$$x_n\sim a^*n^{-k^*}L^*(1/n),\quad n\to\infty,$$

где $k^*=1/(k-1)$, $a^*=(k^*/a)^{k^*}$, а $x^{k^*}L^*(x)$ является функцией, обратной $x^{k-1}L(x)$. В. И. Левин

5880. **О представлении кардинальными рядами. Нобл** (The consistency of cardinal series. Noble M. E.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, № 1, 139—142 (англ.)

Автор обобщает один результат Феррара (Ferrar W. L., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1927, 47, 230—242), устанавливая, что если последовательности вещественных чисел $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ при некотором вещественном λ удовлетворяют условиям

$$|\alpha_n-n|\leqslant D<\pi^{-1}\ln 2,\quad |\beta_n-\lambda-n|\leqslant D<\pi^{-1}\ln 2$$

и

$$G(x)=\lim_{N\to\infty}(x-\alpha_0)\prod_{-N}^{N}{}'\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right),$$

$$H(x)=\lim_{N\to\infty}(x-\beta_0-\lambda_0)\prod_{-N}^{N}{}'\left(1-\frac{x}{\beta_n+\lambda}\right),$$

то какова бы ни была последовательность A_n $(-\infty<n<\infty)$, для которой $\Sigma_{-\infty}^{\infty}|A_n|^2|n|^{4D}<\infty$, она определяет функцию

$$f(x)=G(x)\sum_{-\infty}^{\infty}A_n/[(x-\alpha_n)G'(\alpha_n)],$$

удовлетворяющую соотношению

$$H(x)\sum_{n=-N}^{N}\frac{f(\beta_n+\lambda)}{(x-\beta_n-\lambda)H'(\beta_n+\lambda)}\to f(x)\text{ при }N\to\infty.$$

Автор отмечает, что остается открытым вопрос, возможно ли улучшить этот результат, заменив константу $\pi^{-1}\ln 2$ константой $1/4$, при которой система функций

$\{e^{i\lambda_n x}\}$ еще остается полной (см., например, Levinson N., Gap and density theorems, New York, 1940) и которую, в известном смысле, дальше увеличить нельзя.

А. Ф. Тиман

5881. **Об устойчивости дифференциальных выражений. Юлам, Хайерс** (On the stability of differential expressions. Ulam S. M., Hyers D. H.), Math. Mag., 1954, 28, № 2, 59—64 (англ.)

Доказывается, что при определенных условиях из «близости» функций следует близость их стационарных точек. Устанавливаются теоремы:

1. Пусть $f(x)$ имеет n-ю производную в окрестности N точки $x=a$. Если $f^{(n)}(a)=0$ и $f^{(n)}(x)$ меняет знак в $x=a$, то каждому $\varepsilon>0$ соответствует такое $\delta>0$, что для любой $g(x)$, имеющей в N n-ю производную и удовлетворяющей в N неравенству $|f(x)-g(x)|<\delta$, найдется точка $x=b$, где $g^{(n)}(b)=0$, причем $|b-a|<\varepsilon$.

2. Пусть $F(x, y)$ непрерывна в области, содержащей точку (a, b); $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в окрестности N точки a; $b=f(a)$; $f'(x)-F(x, f(x))$ обращается в нуль при $x=a$ и меняет знак в каждой окрестности точки a. Тогда каждому $\varepsilon>0$ соответствует такое $\delta>0$, что для любой дифференцируемой $g(x)$, удовлетворяющей неравенству $|f(x)-g(x)|<\delta$ $(x\in N)$, найдется точка x_0, в которой $g'(x_0)=F(x_0, g(x_0))$, причем $|x_0-a|<\varepsilon$.

3. Пусть $F(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные второго порядка в окрестности N точки (x_0, y_0) и пусть $F_x(x_0, y_0)=F_y(x_0, y_0)=0$; $F_{yy}(x_0, y_0)\neq 0$; $F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}\neq 0$ в (x_0, y_0). Тогда для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что если $G(x, y)$ — функция с непрерывными частными производными второго порядка и с $G_{yy}\neq 0$ в N, удовлетворяющая в N неравенству $|G(x, y)-F(x, y)|<\delta$, то существует точка (x_1, y_1), в которой $G_x(x_1, y_1)=G_y(x_1, y_1)=0$, где $|x_1-x_0|<\varepsilon$, $|y_1-y_0|<\varepsilon$.

Отметим, что доказательство теоремы 2 содержит дефект; одно из утверждений, на которых основано доказательство, ошибочно, и это делает невозможным использование теоремы 1. Однако утверждение теоремы 2 справедливо.

А. А. Нудельман

5882. **О высших разностях. I. Определения и основные теоремы. II. Связь между производными функции и ее высшими разностями. Чакрабарти** (On higher differences. Nota I. Definitions and direct theorems. Nota II. The relations between the differential coefficients and the higher differences of a function. Chakrabarti S. C.), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, 23, № 2, 255—269, 270—276 (англ.)

Пусть u_x — функция от x. Рассматриваются операторы A^r, A_r, определяемые равенствами

$$A^r u_x = A^{r-1}u_{x+1} - a^{r-1}A^{r-1}u_x, \quad A^0 u_x = u_x,$$

$$A_r u_x = A_{r-1}u_{a+x} - a^{r-1}A_{r-1}u_x, \quad A_0 u_x = u_x.$$

Если $a=1$, то $A^r=\Delta^r$.

Установлен ряд свойств этих операторов. Так, с их помощью каждый многочлен от x или от a^x представляется формулой, аналогичной формуле Тейлора. Действие оператора A_n на ряды, образованные определенным образом из разложений элементарных функций, аналогично n-му дифференцированию самих разложений.

Во второй заметке выводятся формулы, выражающие $A^n u_x$ и $A_n u_x$ через последовательные производные функции u_x, а также du_x/dx через $A^1u_x A^2u_x, \ldots$, для случая, когда u_x — многочлен.

Г. П. Сафронова

5883. **Исчисление конечных разностей. Котари** (Calculul cu diferenţe finite. Cotariu M.), Rev. mat. şi fiz., 1953, 4, № 12, 305—313 (рум.)

Статья содержит некоторые элементарные сведения по теории конечных разностей. Излагается построение для данного ряда чисел таблицы конечных разностей. Устанавливаются свойства операторов Δ и $1+\Delta$. Приводятся выражения конечных разностей для многочлена. Полученные результаты прилагаются к табулированию функций, суммированию некоторых конечных рядов, численному решению уравнений.

А. Г. Школьник

5884. **Гладкие частные решения системы неоднородных уравнений в конечных разностях. Арешев М. С.** Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 36 (Матем. науки, кн. 7), 3—14

Рассматривается уравнение

$$\mathbf{g}(x+h)+A(x)\,\mathbf{g}(x)=\mathbf{f}(x) \quad (-\infty<x\leqslant c;\ h>0), \quad (1)$$

где $A(x)$ — данная непрерывная квадратная матрица порядка n, $\mathbf{f}(x)$ — данный непрерывный вектор, $\mathbf{g}(x)$ — искомый вектор того же порядка. Частное решение строится в виде

$$\mathbf{g}(x)=\mathbf{f}(x-h)-A(x-h)\,\mathbf{f}(x-2h)+$$
$$+A(x-h)\,A(x-2h)\,\mathbf{f}(x-3h)-\ldots$$

$(-\infty<x\leqslant c+h)$. Показано, что если $f_i(x)\neq 0$ $(i=1, \ldots, n;\ x\leqslant x_0)$ для некоторого x_0 и

$$\lim_{m\to\infty}|a_{ij}(x-mh)|\,|f_j(x-(m+1)h)|\,|f_i(x-mh)|^{-1}\leqslant$$
$$\leqslant q_{ij}<1/n$$

$(-\infty<x\leqslant c;\ i, j=1, \ldots, n)$, то сумма приведенного ряда образует непрерывное решение уравнения (1). *(Прим. реф.)* Условие $q_{ij}<1/n$ можно заменить на такое: $\sum_{j=1}^{n}q_{ij}<1$ $(i=1, \ldots, n)$. В случае постоянства матрицы $A(x)$ доказано, что построенное решение будет достаточно гладким, если заданная функция $f(x)$ имеет ту же степень гладкости и характеристические числа матрицы A удовлетворяют необходимым ограничениям. Задача о построении достаточно гладкого частного решения уравнения (1) решается также на конечном отрезке, причем в этом случае ряд обрывается, превращаясь в конечную сумму, к которой (чтобы компенсировать разрывы этой суммы и ее производных до соответствующего порядка) добавляется некоторый многочлен.

Чтение работы затруднено большим количеством опечаток, неудачных и неточных формулировок, небрежным типографским оформлением и т. п.

А. Д. Мышкис

5885. **О некоторых классических формулах анализа. Баккес** (Sur quelques formules classiques d'analyse. Backes F.), Mathesis, 1954, 63, № 6—8, 207—210 (франц.)

Предлагается новый вариант вывода формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Использованный прием позволяет также вывести теорему о среднем

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b\varphi(x)\,dx$$

из частного ее случая $\varphi(x)\equiv 1$.

Теорема о среднем Вейерштрасса $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=$ $=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$ при дополнительном предположении о непрерывности функции $\varphi(x)$ (или о наличии лишь конечного числа точек разрыва), устанавливается посредством интегрирования по частям.

В. Л. Гончаров

5886. **Линейная зависимость функций одного вещественного переменного. Ярник** (Lineární závislost funkcí jedné reálné proměnné. Jarník Vojtěch), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 1, 32—43 (чеш.; резюме русс., франц.)

Пусть функции одного вещественного переменного

$$f_0, f_1, \ldots, f_{\nu-1} \quad (1)$$

имеют в точке α производные до порядка $n-1$ включительно ($0<\nu<n$).

Пусть матрица чисел

$$f_l^{(k)}(\alpha)=a_{kl} \quad (0\leqslant l<\nu,\ 0\leqslant k<n) \quad (2)$$

имеет ранг ν. Пусть $\Delta_\nu(x)$ — определитель Вронского функций (1). Тогда имеют место утверждения I: Существует $\delta>0$ такое, что $\Delta_\nu(x)\neq 0$ для $0<|x-\alpha|<\delta$.

II. Точнее: составим из чисел (2) определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{I_1,\,0}, \ldots, a_{I_1,\,\nu-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{I_\nu,\,0}, \ldots, a_{I_\nu,\,\nu-1} \end{vmatrix} \quad (0\leqslant I_1<I_2<\ldots<I_\nu<n)$$

так, чтобы было $\Delta\neq 0$ и чтобы одновременно сумма $I_1+I_2+\ldots+I_\nu$ была наименьшей.

Тогда

$$I_1!\ldots I_\nu!\Delta_\nu(\alpha+\xi)=$$
$$=\xi^{I_1+\ldots+I_\nu-\nu(\nu-1)/2}\left(\Delta\prod_{1\leqslant i<k\leqslant\nu}(I_k-I_i)+o(1)\right)$$

при $\xi\to 0$.

III. Из I легко вытекает, что если определитель Вронского n функций

$$f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \quad (3)$$

для всех $x\in(a,b)$ имеет один и тот же ранг ν, то функции (3) связаны в (a,b) ровно $n-\nu$ независимыми линейными соотношениями с постоянными коэффициентами.

E. Čech.

5887 К. **Математический анализ. Т. 2. Погожельский** (Analiza matematyczna. T. 2. wyd. 4. Pogorzelski W. Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk, 1953, 308 s., 28 zł.), Przeg. bibliogr., 1953, 9 (217), № 47, 615 (библ.)

5888 К. **Математический анализ. Т. 3. Погожельский** (Analiza matematyczna. T. 3. Pogorzelski W. PWN, 1953, 20 p., 14,75 zł.), Zarowiedzi Wydawnicze, 1953, 2, № 33, 4—5 (библ.)

5889 К. **Дифференциальное и интегральное исчисление для техников. Суэренс** (Differentiaal-en integraalrekening voor technicus. Suerens L., Antw.-Amsterdam, Standaard Boekh, 1953, 112 blz., 125 fr.), Bibliogr. Belgique, 1953, 79, № 12, 319 (библ.)

5890 К. **Анализ. Уайли** (Calculus. Wylie C.R., Jr, New York, McGraw Hill Book Company, 1955, 10 + 565 p., 6.00 doll.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 8, 562 (библ.)

5891 К. **Избранные разделы математического анализа** (Wybrane rozdziały z analizy matematycznej. Praca zbiorowa, pod red. Wrony Włodzimierza, Kraków, Państw. Wydawn. Nauk, 1954, 255 s., 10, 20 zł.), Przeg. bibliogr., 1955, 11, № 2, 22 (библ.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

5892. **О суммировании бесконечных рядов в замкнутом виде. Уилон** (On the summation of infinite series in closed form. Wheelon Albert D.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 1, 113—118 (англ.)

Рассматриваются некоторые приемы для отыскания в замкнутом виде суммы бесконечного ряда

$$\sum_1^\infty F(n). \quad (1)$$

В основе этих приемов лежит преобразование Лапласа. Пусть $F(p)=\int_0^\infty e^{-xp}f(x)\,dx$. Тогда (формально)

$$\sum_1^\infty F(n)=\int_0^\infty f(x)\sum_1^\infty (e^{-x})^n dx=\int_0^\infty \frac{f(x)}{e^x-1}\,dx \quad (2)$$

и вычисление суммы ряда (1) сводится к вычислению интеграла (2). Эта идея развивается в различных направлениях. Приводится несколько примеров.

Б. М. Левитан

5893. **Одно обобщение условия сходимости в теоремах тауберова типа. Вучкович** (Једно проширење услова конвергенције код ставова тауберове природе. Вучковић Владета). Зб. радова Српска АН, 1953, 35, № 3, 75—84 (серб.; резюме франц.)

Основная теорема: Пусть при $x\geqslant 0$ $\alpha(x)$ — неубывающая непрерывная справа функция, стремящаяся к бесконечности при $x\to\infty$, $\varphi(x)$ — обратная функция, непрерывная слева, $X=X(x,\varepsilon)$ определяется равенством

$$X(x,\varepsilon)=\varphi[\alpha(x)+\varepsilon].$$

Тогда из $\int_0^x f(t)\,d\alpha(t)=o(1)$ $(x\to\infty)$ следует $f(x)=o(1)$ $(x\to\infty)$, если выполнено условие

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\varliminf_{x\to\infty}\ \inf_{x\leqslant x'\leqslant X(x,\,\varepsilon)}\frac{\rho(x')\,\Phi[f(x')]-\rho(x)\,\Phi[f(x)]}{\rho(x)}\geqslant 0,$$

где $\Phi(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ — строго возрастающая непрерывная функция, а $\rho(x)$ $(0\leqslant x<\infty)$ — функция «регулярного роста», т. е. удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{x\to\infty}\ \sup_{x\leqslant x'\leqslant X(x,\,\varepsilon)}\left|\frac{\rho(x')-\rho(x)}{\rho(x)}\right|=0.$$

Для $\rho(x)\equiv 1$ результат известен (Karamata J., Amer. J. Math., 1939, 61, 769—770). Б. И. Коренблюм

5894. **Тауберовы соотношения между частными суммами рядов, их преобразованиями Рисса и преобразованиями Абеля. Агнью** (Tauberian relations among partial sums, Riesz transforms, and Abel transforms of series. Agnew Ralph Palmer), J. reine und angew. Math., 1954, 193, № 1/2, 94—118 (англ.)

Пусть $\sum_{n=0}^\infty u_n$ — числовой ряд с комплексными членами, S_n — его частная сумма n-го порядка и

$$\sigma(t)=\sum_{n=0}^\infty b_n(t)\,u_n \quad (1)$$

— данное его преобразование. Для класса рядов, удовлетворяющих некоторому условию типа Таубера, формулируется восемь задач, возникающих при изучении разностей $\sigma(t)-S_n$ для разных случаев изменения переменных n и t. Отдельные специальные случаи таких задач рассматривались ранее в работе Гадвигера (Hadwiger Hügo, Comment. math. helv., 1944, 16, 209—214) и в ряде появившихся после нее других работ.

Для класса рядов, удовлетворяющих условию $\limsup|nu_n|<\infty$, в тех случаях, когда (1) есть преобразование Абеля или Рисса, устанавливается несколько теорем, носящих характер неравенств вида

$$\limsup|\sigma(t_n)-S_n|\leqslant H\limsup|nu_n|, \quad (2)$$

$$\limsup |\sigma(t) - S_{n(t)}| \leqslant H \limsup |nu_n|, \qquad (3)$$

в которых t_n и $n(t)$ — некоторые специальным образом выбранные последовательности. Так, например, если (1) есть преобразование Абеля, то существует последовательность t_n (соответственно целочисленная функция $n(t)$), не зависящая от ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, для которой справедливо (2) (соответственно (3)). В этом случае наименьшим возможным значением константы H в этих неравенствах является

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx + \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \approx 0{,}9680448.$$

Относящиеся к формулируемым задачам результаты аналогичного содержания с указанием точного значения наилучших констант даны также для случаев, когда в неравенствах (2) и (3) вместо $\sigma(t)$ и S_n рассматриваются разности средних Абеля и средних Рисса, а также разности средних Рисса и сбычных частных сумм.

А. Ф. Тиман

5895. **О рядах с простыми числами и их приложениях к проблеме отыскания плотности Дирихле. Кноблох** (Über Primzahlreihen nebst Anwendung auf ein elementares Dichteproblem. Knobloch Hans-Wilhelm), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1954, **19**, № 1—2, 1—13 (нем.)

Доказывается следующая теорема:

Пусть

$$f_m^{(a)}(s) = \sum_{\substack{p^\nu \equiv a \pmod m \\ p^\nu > m}} \frac{1}{\nu p^{\nu s}}, \qquad (1)$$

где суммирование распространено по всем степеням простых чисел, принадлежащих прогрессии $a + lm$, $l = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда для функции (1) при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$f_m^{(a)}(s) - f_m^{(a)}(s_0) < C_\varepsilon \cdot m^{\varepsilon - 1} \log [s/(s-1)], \qquad (2)$$

выполняющееся равномерно в интервале $1 < s \leqslant s_0$; C_ε — постоянная, не зависящая от m, a, s. Из этой теоремы автор получает следствие: Множество M всех простых чисел p, для которых $p-1$ свободно от квадрата, имеет плотность Дирихле $\delta(M) = \prod_q \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right)$, где q пробегает все простые числа.

Доказательство этих положений основано на элементарной теории характеров и свойствах функции Мёбиуса. При изложении автор придерживается понятий и обозначений, введенных в книге Г. Хассе «Лекции по теории чисел», М., Изд-во ин. лит., 1953.

В. М. Архангельская

5896. **Проблема «полного переноса» для метода суммирования Гёльдера. Катнер** (The problem of «total translativity» for Hölder summability. Kuttner B.), J. London. Math. Soc., 1954, **29**, № 4, 486—491 (англ.)

Метод суммирования A допускает перенос, если из суммируемости ряда

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \qquad (1)$$

методом A к s вытекает суммируемость ряда

$$0 + a_0 + a_1 + \cdots \qquad (2)$$

тем же методом к s и наоборот (s — конечное число). Если это остается справедливым и для $s = \pm\infty$, то метод A допускает полный перенос. Известно, что метод Чезаро (C, α) допускает полный перенос. В работе исследуется аналогичный вопрос для метода Гёльдера (H, k) (Определение метода (H, k) для $k > -1$ см. Харди «Расходящиеся ряды», Изд-во ин. лит., М.— Л., 1951).

Доказываются следующие утверждения:

а) Если ряд (1) суммируется (H, k) к $+\infty$, то ряд (2) суммируется (H, k) к $+\infty$ для $0 < k < 1$, но не для $-1 < k < 0$, $k > 1$. б) Если ряд (2) суммируется (H, k) к $\pm\infty$, то ряд (1) суммируется (H, k) к $\pm\infty$ для $-1 < k < 0$, $k > 1$, но не для $0 < k < 1$.

Таким образом метод суммирования (H, k) допускает полный перенос лишь в тривиальных случаях $k = 0$, $k = 1$.

И. И. Огиевецкий

5897. **Внутренняя совместность и полное включение методов суммирования. Лоренц, Робинсон** (Core-consistency and total inclusion for methods of summability. Lorentz G. G., Robinson A.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 1, 27—34 (англ.)

Рассматриваются методы суммирования бесконечных рядов, порождаемые вещественными матрицами Тёплица.

Пусть A и B — две такие матрицы. Если для каждой ограниченной последовательности вещественных чисел A ядро содержится в B-ядре, то метод суммирования A называется внутренне совместным с методом B (относительно множества ограниченных последовательностей). Если же всякая вещественная последовательность, B-суммируемая к некоторому (конечному или бесконечному) пределу, непременно A-суммируема к тому же пределу, то метод B называется вполне включенным в метод A.

Доказываются следующие предложения.

1) Если метод A внутренне совместен с B, причем все элементы матрицы B неотрицательны, то существует регулярная матрица C с неотрицательными элементами такая, что для матрицы $CB - A$ сумма абсолютных значений элементов m-й строки стремится к нулю при $m \to \infty$.

2) Если матрицы A и B имеют «конечные строки» (т. е. в каждой строке лишь конечное число элементов отлично от нуля), причем все элементы B неотрицательны и B вполне включается в A, то существует натуральное число p и регулярная матрица C с конечными строками и с неотрицательными элементами такая, что $CB_p = A_p$. Здесь A_p и B_p — матрицы, полученные соответственно из A и B посредством замены всех элементов из первых p столбцов нулями.

В случае, когда B — единичная матрица, эти результаты сводятся к известным теоремам Агнью (Agnew R. P., Amer. J. Math., 1939, 61, 178—186) и Гурвица (Харди, Расходящиеся ряды, Изд-во ин. лит., М.— Л., 1951, стр. 75, теорема 10).

Приводятся некоторые дополнения и применения. Например, из 2) следует, что если $A = \|a_{mn}\|$ и $B = \|b_{mn}\|$ — треугольные неособенные матрицы, то методы A и B вполне эквивалентны (т. е. каждый из них вполне включается в другой) тогда и только тогда, когда существует натуральное p и $c_m \to 1$ такие, что $a_{mn} = c_n b_{mn}$ $(m = 1, 2, \ldots;\ n = p,\ p+1, \ldots)$.

М. А. Рутман

5898. **О тейлоровском методе суммирования. Мейер-Кёниг, Целлер** (Über das Taylorsche Summierungsverfahren. Meyer-König W., Zeller K.), Math. Z., 1954, 60, № 3, 348—352 (нем.)

Множество последовательностей $\{a_n\}_0^\infty$, для которых сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, где

$$b_n = (1-\alpha)^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \alpha^{k-n} a_k \quad (n = 0, 1, \ldots), \ 0 < \alpha < 1, \ (1)$$

обозначается через $\mathfrak{T}_\alpha$. Ряд Σa_n при $\{a_n\}_0^\infty \in \mathfrak{T}_\alpha$ регулярно или сингулярно суммируем методом T_α, смотря по тому, является точка $z=\alpha$ регулярной или особой точкой функции $a(z)=\Sigma_0^\infty a_k z^k$.

Доказывается, что:

1) система уравнений (1) при заданных b_n и искомых t_n имеет бесконечное множество решений.

2) При любом α, удовлетворяющем условию $0<\alpha<1$, существуют ряды сингулярно суммируемые методом T_α.

3) Для каждого α, удовлетворяющего условию $0<\alpha\leqslant 1/2$, существует последовательность $\{a_n\}_0^\infty$, не принадлежащая к $\mathfrak{T}_\alpha$, в то время как последовательность $\{0, a_0, a_1 a_2, \ldots\} \in \mathfrak{T}_\alpha$. Известно, что при $1/2<\alpha<1$ такой последовательности нет. Такие же (за исключением 3) теоремы доказываются для методов S_α и T'_α, где метод S_α получается из преобразования

$$b_n=\alpha(1-\alpha)^n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\alpha^k a_k \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

так же, как T_α из (1).

Что касается метода T'_α, то он определяется для интеграла $\int_0^\infty ds(x)$, где $s(x)$ — функция с ограниченным изменением в любом конечном промежутке. Именно, множество таких $s(x)$, для которых числа

$$b_n=\frac{a^n}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-ax}ds(x) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\ a>0,$$

образуют сходящийся ряд, обозначим через $\mathfrak{T}'_a$. Если $s(x)\in\mathfrak{T}'_a$, то интеграл $\int_0^\infty ds(x)$ регулярно или сингулярно суммируем методом T'_a, смотря по тому, является точка $z=a$ регулярной или особой точкой для функции $s(z)=\int_0^\infty e^{-zx}ds(x)$. Ф. И. Харшиладзе

5899. Клустермановский метод в тауберовых теоремах для C_k суммирования. К о р е в а р (Kloosterman's method in tauberian theorems for C_k summability. K o r e v a a r J a c o b), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 574—577 (англ.)

Пусть функция $a(t)$ $(t\geqslant 0)$ интегрируема на любом конечном интервале. Интеграл $\int_0^\infty a(t)\,dt$ называется суммируемым C_k к значению s, если

$$A_k(x)=\{\int_0^x (x-t)^k a(t)\,dt\}/\Gamma(k+1)\sim sx^k/\Gamma(k+1)$$
$$x\to\infty,\ k>0.$$

Автор доказывает известную тауберову теорему для интегралов, именно, если $\int_0^\infty a(t)\,dt=s(C_k)$ и $ta(t)\leqslant M$, то $\int_0^\infty a(t)\,dt=s$, при этом под методом Клустермана он понимает следующее: k-я производная от $A_k(x)$ (равная интегралу $\int_0^x a(t)\,dt$) оценивается по одной формуле А. А. Маркова (см. Исчисление конечных разностей) выражающей k-ю производную функции через ее конечные разности. Автор отмечает, что из формулы А. А. Маркова могут быть получены различные другие результаты в теории расходящихся рядов.

М. П. Щеглов

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

5900. Об одном обобщении функций Бесселя и его применении к интегрированию некоторых линейных уравнений с частными производными любого порядка. Ч о р ъ н е с к у (O generalizare a funcţiilor lui Bessel şi aplicaţiile lor la integrarea unor ecuaţii liniare cu derivate parţiale de ordin oarecare. C i o r ă n e s c u N i c o l a e), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1954, 6, № 3, 499—509 (рум.; резюме русс., франц.)

Рассматриваются следующие функции:

$$J_{m\nu k}(x)=\gamma_{m\nu k}x^\nu\int_0^1(1-t^m)^{\nu-1/2}C_{mk}(tx)\,dt. \qquad (1)$$
$$\mathrm{Re}\,\nu>-1/2,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1,$$

где

$$C_{mk}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{mn+k}}{(mn+k)!},$$
$$\gamma_{m\nu k}=m^{1-\nu}\left\{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right)\right\}^{-1}.$$

Функции $J_{2\nu 0}(x)$ и $J_{2\nu 1}(x)$ совпадают соответственно с функцией Бесселя $J_\nu(x)$ и функцией Струве $H_\nu(x)$. Почленным интегрированием (1) получаются степенные ряды для функций $y_k\equiv J_{m\nu k}(x)/x^\nu$, $k=0,1,\ldots,m-1$. Функции y_k $(k=0,1,\ldots,m-1)$ удовлетворяют уравнению $xy_k^{(m)}+[m(2\nu+1)/2]\,y_k^{(m-1)}+xy_k=\delta_k^{m-1}$ $(\delta_k^{m-1}=0$ при $k\neq m-1$, $\delta_{m-1}^{m-1}=1)$. Если $U(x,y)$ — решение уравнения $\dfrac{\partial^m U}{\partial x^m}+\dfrac{\partial^m U}{\partial y^m}=0$, удовлетворяющее условию $\left.\dfrac{\partial^{m-1}U}{\partial x^{m-1}}\right|_{y=0}=0$, то

$$u(x,y)=\int_0^1(1-t^m)^n U(x,ty)\,dt,\ n>-1,$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}+\frac{\partial^m u}{\partial y^m}+\frac{m(n+1)}{y}\frac{\partial^{m-1}u}{\partial y^{m-1}}=0.$$

Формально записывается представление $u(x,y)$ в виде

$$u(x,y)=y^{-n-1/2}\sum_{k=0}^{m-2}\sum_{p=1}^{\infty}A_{p,k}e^{\alpha_{p,k}x}J_{m,n+1/2,k}(\alpha_{p,k}y),$$

$A_{p,k}$, $\alpha_{p,k}$ — произвольные числа. При $m=2$ оно было отмечено в предыдущей работе автора (Bul. ştiint. Acad. R. P. Romîne, sec. mat. şi fiz., 1950, 2, № 4, 293—299). М. Н. Олевский

5901. Интеграл с бесконечным пределом, содержащий произведение двух модифицированных функций Бесселя второго рода. М а к - Р о б е р т (An infinite integral involving a product of two modified Bessel functions of the second kind. M a c R o b e r t T. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1953, 1, 187—189 (англ.)

Интеграл упомянутый в заглавии, есть $\int_0^\infty x^{l-1}\times$ $\times K_m(x)K_n(b/x)\,dx$, где l, m и n могут быть как вещественными, так и комплексными и $\mathrm{Re}\,b>0$. Автор находит для него разложение, являющееся суммой двух рядов по обобщенным гипергеометрическим функциям (по функциям ${}_0F_3$ от аргумента $b^2/16$).

N. D. Kazarinoff

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 422

5902. **Асимптотические разложения функций Бесселя большого порядка.** **Олвер** (The asymptotic expansion of Bessel functions of large order. Olver F. W. J.), Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1954, A247, № 930, 328—368 (англ.)

Метод, развитый автором (реф. 5776), применяется для вывода асимптотических разложений цилиндрических функций $I_\nu(\nu z)$, $K_\nu(\nu z)$, $J_\nu(\nu z)$, $Y_\nu(\nu z)$, $H_\nu^{(1)}(\nu z)$, $H_\nu^{(2)}(\nu z)$ и их производных, пригодных для достаточно больших вещественных или комплексных значений параметра ν. Наиболее простые формулы получаются для функций $I_\nu(\nu z)$ и $K_\nu(\nu z)$, именно:

$$I_\nu(\nu z) \sim \frac{e^{\nu\sqrt{1+z^2}}\, z^\nu (1+z^2)^{-1/4}}{\sqrt{2\pi\nu}\,(1+\sqrt{1+z^2})^\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{U_s\{(1+z^2)^{-1/2}\}}{\nu^s}, \tag{1}$$

$$K_\nu(\nu z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}\, \frac{e^{-\nu\sqrt{1+z^2}}\, z^{-\nu} (1+z^2)^{-1/4}}{(1+\sqrt{1+z^2})^{-\nu}} \times \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{U_s\{(1+z^2)^{-1/2}\}}{\nu^s},$$

$$(\nu \to \infty,\ |\arg\nu| < \pi/2),$$

где $U_s(u)$ — полиномы относительно u, определяемые рекуррентными соотношениями

$$U_{s+1}(u) = \frac{1}{2}u^2(1-u^2)\frac{dU_s}{du} + \frac{1}{8}\int_0^u (1-5u^2)\,U_s(u)\,du,$$

$$U_0(u) = 1.$$

Разложения (1) справедливы равномерно относительно z в секторе $|\arg z| \leqslant (\pi/2) - \varepsilon$. Соответствующие формулы для функций Бесселя и Ханкеля имеют аналогичную структуру, но содержат функции Эйри, вместо экспоненциальных функций.

Найденные разложения применяются для исследования распределения нулей цилиндрических функций в плоскости комплексного переменного z. Приводятся вспомогательные таблицы, полезные при вычислении нулей рассматриваемых функций. Н. Н. Лебедев

5903. **Асимптотическое разложение бесселевых функций в промежуточной области.** **Нагасе** (Asymptotic expansions of Bessel functions in the transitional regions. Nagase Masahumi), J. Phys. Soc. Japan, 1954, 9, № 2, 296—297 (англ.)

Ищется разложение функции Ганкеля $H_\nu^{(2)}(z)$ в виде

$$H_\nu^{(2)}(z) = 3^{-1/2}\cdot e^{-\pi i/3}\left\{\eta H_{-1/3}^{(2)}(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi)\,\eta^{2n+1}\right\},$$

где $\nu = z\operatorname{ch}\gamma$; $\eta = \operatorname{th}\gamma$ и $\xi = (i\nu/3)\operatorname{th}^3\gamma$. Подстановка ряда в уравнение Бесселя приводит к системе дифференциальных уравнений для $a_n(\xi)$, которые легко решаются. Таким путем получается выражение

$$H_\nu^{(2)}(z) = 3^{-1/2}\cdot e^{-\pi i/3}\,\eta\,[A(\eta,\xi)\,H_{-1/3}^{(2)}(\xi) + B(\eta,\xi)\,H_{2/3}^{(2)}(\xi)],$$

где A и B суть ряды по степеням η^2, коэффициенты которых — простые алгебраические функции от ξ.

Б. К.

5904. **О некоторых бесконечных рядах, связанных с функциями Бесселя.** **Фенье** (Néhany, a Bessel-függvényekkel kapcsolatos végtelen sorról. Fenyö István), Mat. lapok, 1953, 4, № 4, 277—283 (венг.; резюме русск., нем.)

Доказываются многочисленные формулы, связанные с бесселевыми функциями. Например, если обозначить через $J_\nu(x)$ бесселевы функции первого рода, а через $\lambda_{\nu n}$ — положительные корни функции J_ν, то имеют место следующие соотношения

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{0i}x)\,J_m(\lambda_{0i}y)}{\lambda_{0i}J_1(\lambda_{0i})} = 0 \quad \begin{cases} 0<x<1/2 \\ 0<y<1/2 \\ m \text{ целое} \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\lambda_{\nu i}x)\,J_0(\lambda_{\nu i}x)}{\lambda_{\nu i}J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})} = \frac{x^\nu}{2} \quad (0<x<1/2;\ \nu>-1/2).$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{[J_0(\lambda_{0i}x)]^2}{\lambda_{0i}J_1(\lambda_{0i})} = \frac{1}{2} \quad (0<x<1/2).$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{[J_m(\lambda_{2mi}x)]^2}{\lambda_{2mi}J_{2m+1}(\lambda_{2mi})} = \frac{(2m-1)!}{m!\,(m-1)!}x^{2m} \quad \begin{cases} 0<x<1/2 \\ m \text{ целое} \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i}x)\,J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i}y)}{\lambda_{\nu i}^{\nu+1}J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})} = 0 \quad \begin{cases} 0<x<1/2 \\ 0<y<1/2 \\ \nu \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots \\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{cases}$$

Резюме автора.

5905. **Асимптотическое разложение цилиндрических функций, примыкающее к формулам Никольсона.** **Шёбе** (Eine an die Nicholsonformel anschliessende asymptotische Entwicklung für Zylinderfunktionen. Schöbe Waldemar), Acta math., 1954, № 92, 265—307 (нем.)

Дается строгое обоснование и оценка границы применимости асимптотических формул для цилиндрических функций, аргумент z и индекс ν которых возрастают таким образом, что разность $z-\nu = O(z^{1/3})$.

В частности, заполняются теоретические пробелы, существовавшие в выводе асимптотических формул Никольсона

$$e^{-\pi i/6}H_\nu^{(1)}(z) \sim \left(\frac{2\gamma}{3z}\right)^{1/2} H_{1/3}^{(1)}\left(\frac{(2\gamma)^{3/2}}{3z^{1/2}}\right),$$

$$\gamma = z-\nu,$$

$$e^{\pi i/6}H_\nu^{(2)}(z) \sim \left(\frac{2\gamma}{3z}\right)^{1/2} H_{1/3}^{(2)}\left(\frac{(2\gamma)^{3/2}}{3z^{1/2}}\right),$$

и производится оценка остаточного члена для комплексных значений ν и z. Автор получает также асимптотические ряды, дающие более точную аппроксимацию рассматриваемых функций, главные члены которых совпадают с формулами Никольсона. Н. Н. Лебедев

5906. **Заметка о многочленах Лежандра.** **Карлиц** (Note on Legendre polynomials. Carlitz L.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, 46, № 2, 93—95 (англ.)

1. Легко проверить, что многочлены Лежандра $P_n(x)$ удовлетворяют соотношению

$$(1-x^2)[P_n'^2(x) - P_{n-1}'(x)\,P_{n+1}'(x)] = n(n+1)[P_n^2(x) - P_{n-1}(x)\,P_{n+1}(x)]. \tag{1}$$

В работе устанавливается, что соотношение (1) характеризует многочлены Лежандра. Именно, доказана теорема:

Пусть $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x$; $f_n(x)$ есть многочлен степени n и (1) верно при замене $P_k(x)$ на $f_k(x)$. Тогда при всех n

$$f_n(x) = P_n(x).$$

2. Доказана формула

$$\frac{d^r}{dx^r} P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^r} \binom{n+\alpha}{n-r},$$

где $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлен Якоби и, как обычно, $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$.

Примечание референта. В работе имеется ошибка: В правой части формулы (2.6) вместо $(n+\alpha)_{n-r}$ должно быть $(r+\alpha+1)_{n-r}$. Соответственно в формуле (2.7) $(n+\beta)_{n-r}$ следует заменить на $(r+\beta+1)_{n-r}$.

Г. И. Натансон

5907. Об одном способе разложения силовой функции сжатого эллипсоида вращения в ряд по полиномам Лежандра. Орлов А. А., Тр. Гос. астроном. ин-та им. Штернберга, 1954, 24, 131—137

Получено разложение в ряд по полиномам Лежандра силовой функции поля тяготения сжатого эллипсоида вращения. Рассмотрены два случая: 1) однородный эллипсоид, 2) неоднородный эллипсоид, поверхностями равной плотности которого являются поверхности соосных эллипсоидов. Вывод формул основан на преобразовании известного выражения силовой функции однородного эллипсоида вращения к виду, позволяющему провести непосредственное разложение в ряд с помощью производящей функции для полиномов Лежандра. В первом случае разложение имеет вид:

$$U = \frac{4}{3}\pi\rho a^2 c \frac{k^2}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{2n} \times \times \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} P_{2n}\left(\frac{z}{r}\right). \qquad (1)$$

Здесь a — экваториальный, c — полярный радиусы эллипсоида, ρ — плотность, k — постоянная Гаусса, $\sigma = \sqrt{a^2 - c^2}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Примечание референта. Область сходимости рядов автором установлена неточно. Ряд (1) сходится при $r > \sigma$. Эта область, в случае $\sigma > c$, не охватывает всего пространства вне эллипсоида.

М. И. Клиот-Дашинский

5908. О полиномах задачи о растягивающем ударе. Денисюк И. Н., Укр. матем. ж., 1954, 6, № 4, 423—429

Дано выражение перемещений сечений тормозного каната, принимаемого за идеальную упругую нить, при внезапном приложении к нижнему его концу груза со скоростью v, через ранее введенные автором (Науч. тр. Моск. горн. ин-та, 1952, № 10) полиномы $M_n(t)$ и $\mathfrak{M}_n(t)$, аналогичные известным полиномам Лагерра $L_n(t)$.

Указаны разложения полиномов $\mathfrak{M}_n(t)$ в конечные суммы по полиномам $M_n(t)$ и по полиномам Лагерра $L_n(t)$. Даны выражения полиномов $L_n(t)$ и $M_n(t)$ через полиномы $\mathfrak{M}_n(t)$, а также ряд других соотношений между этими полиномами. Г. Н. Савин

5909. Новые полиномы, аналогичные полиномам Лагерра. Денисюк (Нові поліноми, аналогічні до поліномів Лягерра. Денисюк І. М.), Доповіді АН УРСР, 1954, № 5, 327—330 (укр., резюме русс.)

Дается определение полиномов $\mathfrak{M}_n(x)$ при помощи производящей функции:

$$(1-t)(1+t)^{-2} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \mathfrak{M}_n(x).$$

Они были наряду с полиномами $M_n(x)$ (РЖМат, 1954, 5643; 1955, 4522, 4523) введены автором ранее при решении задач динамики шахтных канатов (реф. 5908). Приводятся соотношения:

$$\mathfrak{M}_{n+1}(x) + \mathfrak{M}_n(x) = M_{n+1}(x) - M_n(x),$$
$$\mathfrak{M}'_{n+1}(x) + \mathfrak{M}'_n(x) + M_n(x) = 0,$$
$$M_n(x) = \mathfrak{M}_n(x) - 2\mathfrak{M}'_n(x)$$

Указывается, что $\mathfrak{M}_n(x)$ удовлетворяет смешанному разностно-дифференциальному уравнению: $\Delta_n y'_n(x) + y_n(x) = 0$.

При представлении:

$$\mathfrak{M}_n(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_{m,n} (x^m / m!)$$

числа $a_{m,n}$ являются решением краевой задачи для конечноразностного уравнения $a_{m+1,n+1} = a_{m+1,n} + a_{m,n}$, когда $a_{m,n}$ задано на двух «прямых»: $m = 3$ и $m = n$. Дано эффективное решение этой задачи, позволяющее сразу выписать полиномы $\mathfrak{M}_n(x)$ до любого n.

Тождество $\sum_{m=0}^{n} (-1)^n a_{m,n} = 4n(-1)^n$ дает возможность проверить правильность составления полиномов. Г. Н. Савин

5910. Некоторые интегралы и разложения, содержащие нормированные полиномы Лагерра и им аналогичные. Денисюк (Деякі інтеграли та розклади, що містять нормовані поліноми Лягерра та їм аналогічні. Денисюк І. М.), Доповіді АН УРСР, 1954, № 3, 165—167 (укр.; резюме русс.)

Для полиномов $M_n(x)$ аналогичных нормированным полиномам Лагерра $L_n(x)$, введенных автором ранее (Тр. Моск. горн. ин-та, 1952, № 10, 29) и примененных им в ряде задач динамики шахтных канатов, дается разложение

$$M_n(x) = L_n(x) - 2L_{n-1}(x) + + 2L_{n-2}(x) + \dots + 2(-1)^n L_0(x)$$

и ему взаимное разложение

$$L_n(x) = M_n(x) + 2M_{n-1}(x) + + 2M_{n-2}(x) + \dots + 2M_0(x).$$

Дается новое соотношение для полиномов Лагерра

$$x[L_{n+2}(x) - L_{n+1}(x)]'' + + (n+1)[L_{n+1}(x) - L_n(x)] = 0.$$

Г. Н. Савин

5911. Полиномы Аппеля. Сингх (Appell set of polynomials. Singh Vikramaditya), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1954, 20, № 3, 341—347 (англ.)

Полиномы Аппеля, определяемые равенством $P'_n(x) = P_{n-1}(x)$, могут быть также определены при помощи производящей функции

$$A(t) e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x).$$

В частности,

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} {}_3F_2\left\{\begin{matrix} -n, & a, & b; \\ & c, & d; \end{matrix} -\frac{t}{x}\right\} d\beta(t) \qquad (1)$$

с производящей функцией

$$A(t)=\int_0^\infty {}_pF_q\left\{\begin{matrix}a,\ b\\ c,\ d\end{matrix};\ ut\right\}d\beta(t) \qquad (2)$$

где ${}_pF_q$ — гипергеометрическая функция (РЖМат, 1953, 317); автор дает обобщение формул (1) и (2):

$$P_n(x)=\frac{x^n}{n!}\int_0^\infty {}_{r+1}F_r\left\{\begin{matrix}-n,\ a_1,\ \dots,\ a_r\\ b_1,\ \dots,\ b_r\end{matrix};\ -\frac{t}{x}\right\}d\beta(t),$$

$$A(t)=\int_0^\infty {}_rF_r\left\{\begin{matrix}a_1,\ \dots,\ a_r\\ b_1,\ \dots,\ b_r\end{matrix};\ -\frac{t}{x}\right\}d\beta(t),$$

основанное на равенстве

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(xu)^n}{n!}\,{}_{r+1}F_r\left\{\begin{matrix}-n,\ a_1,\ \dots,\ a_r\\ b_1,\ \dots,\ b_r\end{matrix};\ -\frac{t}{x}\right\}=$$

$$=e^{xu}\,{}_rF_s\left\{\begin{matrix}a_1,\ \dots,\ a_r\\ b_1,\ \dots,\ b_s\end{matrix};\ ut\right\}.$$

Б. А. Рымаренко

5912. О полиномах Анджелеску. Сингх (On Angelescus polynomials. Singh Vikramaditya), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1954, 20, № 3, 280—289 (англ.)

Полиномы Анджелеску $\{\Pi_n(x)\}$ степени n определяются равенством

$$\Pi_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}A_n(x)],$$

где $A_n(x)=A(a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_n,\ x)^n$ — полином, удовлетворяющий условию

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{A_n(x)}{n!}\right]=\frac{A_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

(полиномы $A_n(x)$ принадлежат классу полиномов Аппеля $\{P_n(x)\}$, определяемых условием $dP_n(x)/dx=P_{n-1}(x)$).

Автор дает представление $\Pi_n(x)$ в виде интеграла Стилтьеса:

$$\Pi_n(x)=n!\int_{-\infty}^{+\infty}L_n(x+t)\,d\beta(t), \qquad (1)$$

где $L_n(x)$ — полином Лагерра, а функция $\beta(t)$ такова, что моменты

$\mu_k=\int_{-\infty}^{+\infty}t^k d\beta(t)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$ существуют и $\mu_0\neq 0$.

Формула (1) применяется для доказательства того, что

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\Pi_n(x)}{n!}\cdot\frac{\omega^n}{n!}=e^{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}J_0(2\sqrt{\omega(x+t)})\,d\beta(t)$$

(J_0 — функция Бесселя; ω — любая конечная величина) и некоторых аналогичных утверждений. При надлежащем подборе чисел $\{\mu_k\}$ полиномы Анджелеску ортогональны. Для них указывается производящая функция.

Примечание референта: На стр. 283 в формуле (7) имеется опечатка. Правая часть этой формулы должна быть:

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{\Pi_{n+1}(x)}{(n+1)!}\right].$$

Б. А. Рымаренко

5913. Гипергеометрические функции и операционное исчисление. Полли (Fonctions hypergéométriques et calcul symbolique. Poli L.), Ann. Univ. Lion, 1953, Sec. A, № 15, 37—51 (франц.)

Известные операционные соотношения

$$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}\,{}_qF_r(a_i;\ b_j;\ xt)\supset\frac{1}{p^{n-1}}\,{}_{q+1}F_r\left(a_i;\ n;\ b_j;\ \frac{x}{p}\right) \qquad (1)$$

и

$$\frac{\Gamma(n)}{p^{n-1}}\,{}_qF_r\left(a_i;\ b_j;\ \frac{x}{p}\right)\subset t^{n-1}\,{}_qF_{r+1}(a_i;\ b_j,\ n;\ xt), \qquad (2)$$

где

$${}_qF_r(a_i;\ b_j;\ x)=\sum_{m=0}^\infty\frac{(a_1,\ m)\dots(a_q,\ m)}{(b_1,\ m)\dots(b_r,\ m)}\,\frac{x^m}{m!},$$

$$(a,\ n)=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$$

применяются для вывода некоторых формул теории гипергеометрических функций. Метод состоит в том, что формулы, справедливые для одних классов гипергеометрических функций, преобразовываются в соответствующие формулы для других классов удалением или добавлением одного множителя типа $(a,\ n)$ в числителе или знаменателе. Для добавления одного множителя в числителе следует заменить x на xt, умножить функцию на $t^{c-1}/\Gamma(c)$, применить формулу (1) и положить $p=1$; для добавления одного множителя в знаменателе следует заменить x на x/p, умножить функцию на $\Gamma(c)/p^{c-1}$, применить формулу (2) и положить $t=1$; для удаления множителей в числителе или знаменателе следует добавить соответственно в знаменателе или числителе один множитель так, чтобы он сократился. Из большого числа выводимых таким образом формул примером может служить формула Эмбера, обобщающая формулу Куммера (ср. реф. 5911):

$$e^w\,{}_1F_1(a;\ c;\ wx)=\sum_{s=0}^\infty\frac{w^s}{s!}\,{}_2F_1(a,\ -s;\ c;\ -x).$$

Эта формула получается указанным путем из

$$e^w\,{}_0F_0(wx)=\sum_{s=0}^\infty\frac{w^s}{s!}\,{}_1F_0(-s;\ -x),$$

т. е.

$$e^{w+wx}=\sum_{s=0}^\infty\frac{w^s(1+x)^s}{s!}.$$

Таким же путем, в частности, могут быть выведены многие интегральные представления гипергеометрических функций.

Опечатка: первая формула на стр. 37 должна выглядеть так

$$(a,\ n)=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

В. И. Левин

5914. Ассоциированные базисные гипергеометрические ряды. Агарвал (Associated basic hypergeometric series. Agarwal R. P.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1953, I, 182—184 (англ.)

Автор доказывает многочисленные тождества, связанные базисным гипергеометрическим рядом ${}_2\Phi_1$ и оператором D, определяемым формулой $Df(x)=x^{-1}[f(x)-f(qx)]$. Эти тождества аналогичны формулам дифференцирования обычных гипергеометриче-

ких рядов. Он доказывает также, что любой из четырех рядов, ассоциированных с ${}_3\Phi_2$, удовлетворяет линейному соотношению с полиномиальными коэффициентами. A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 421

5915. **Преобразования рядов типа ${}_3\Psi_3$.** Джэксон (Jackson Margaret), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 4, 557—562 (англ.)

В предыдущей работе (J. London Math. Soc., 1952, 27, 116—123) автор получила некоторые соотношения между рядами типа ${}_3H_3(1)$ и ${}_3F_2(1)$ (${}_MF_N$ — обобщенный гипергеометрический ряд, ${}_MH_N$ — двусторонний обобщенный гипергеометрический ряд). В настоящей работе автор указывает соответствующие им базисные аналоги, устанавливая некоторые линейные соотношения между двумя рядами типа ${}_3\Psi_3$ и двумя рядами типа ${}_2\Phi_2$. Эти соотношения в случае, когда один из параметров, входящих в знаменатели ${}_3\Psi_3$, равен базису q, — переходят в некоторые (частично известные) двучленные и четырехчленные соотношения между ${}_3\Phi_2$. Здесь ${}_M\Phi_N$ — базисный гипергеометрический ряд, ${}_M\Psi_M$ — двусторонний базисный гипергеометрический ряд:

$$ {}_M\Psi_M\left[\begin{matrix}a_1,\ \dots,\ a_M;\\ b_1,\ \dots,\ b_M;\end{matrix}\ x\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1)_{q,n}\cdots(a_M)_{q,n}}{(b_1)_{q,n}\cdots(b_M)_{q,n}}x^n, $$

где

$$ (a)_{q,n}=(1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1}),\ n>0; $$

$$ (a)_{q,0}=1; $$

$$ (a)_{q,-n}=[(1-aq^{-1})(1-aq^{-2})\dots(1-aq^{-n})]^{-1},\ n>0 $$

$$ |q|<1,\ |x|<1,\ |b_1\dots b_M|<|a_1\dots a_Mx|. $$

или $|q|>1,\ |x|>1,\ |a_1\dots a_Mx|<|b_1\dots b_M|$.

М. Н. Олевский

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5916. **Общая теория интегральных преобразований.** Колино (Teoria general de transformadas integrales. Colino Antonio), Rev. cienc. apl., 1954, 8, № 3, 193—202 (исп.)

Наводящие рассмотрения по вопросу о разложимости произвольной функции $f(x)$ в ряд по собственным функциям самосопряженного оператора Штурма—Лиувилля, иллюстрируемые примерами ряда Фурье, ряда Фурье — Бесселя и разложения в ряд по полиномам Лежандра. В. И. Левин

5917. **Приложение теоремы О. Саса для произведения преобразований Чезаро и Лапласа.** Раджагопал, Якимовский (Applications of a theorem of O. Szász for the product of Cesàro and Laplace transforms. Rajagopal C. T., Jakimovski (Amir) Amnon), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 370—384 (англ.)

Пусть $s(u)$ — функция, имеющая ограниченную вариацию на любом конечном отрезке положительной части вещественной оси, $s(0)=0$ и для $\alpha\geqslant 0$.

$$ C_\alpha(x)\equiv s_\alpha(x)\,x^{-\alpha}=\alpha x^{-\alpha}\int_0^x(x-u)^{\alpha-1}s(u)\,du\ \ (\alpha>0), $$

$$ C_0(x)\equiv s_0(x)=s(x). $$

Если для $\alpha>0$, $t>0$ интеграл

$$ L_\alpha\{s(u),t\}\equiv\frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty e^{-tu}s(u)\,u^\alpha du $$

абсолютно сходится и $\lim_{t\to+0}L_\alpha\{s(u),t\}=s$, то из неравенства

$$ s(x)-(\alpha+1)\,x^{-\alpha-1}\int_0^x s(u)\,u^\alpha du>-H\ (H\text{—константа}), \tag{1} $$

следует, что при $x\to\infty$ $C_1(x)\to s$. Если к тому же левая часть (1) ограничена также и сверху, то при любом $\varepsilon>0$ $C_\varepsilon(x)-s$ меняет знак при $x\to\infty$. Указывается на связь этого результата с теоремой Саса (Szász O., Trans. Amer. Math. Soc., 1936, 39, 117—130) и известной тауберовой теоремой Харди и Литтльвуда, а также на приложение его к рядам Дирихле. А. Ф. Тиман

5918. **О некоторых двойственных себе функциях одного нового преобразования.** Митра, Чандра (On certain functions which are self-reciprocal under a new transform. Mitra S. C., Chandra Dinesh), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, 46, № 1, 15—24 (англ.)

Рассматриваются двойственные себе функции $f(x)$ преобразования $g(x)=\int_0^\infty\widetilde{\omega}_{\mu,\nu}(xy)\,f(y)\,dy$, где $\widetilde{\omega}_{\mu,\nu}(xy)=\sqrt{xy}\int_0^\infty J_\nu(t)\,J_\mu(xyt^{-1})\,t^{-1}\,dt$, т. е. решения интегрального уравнения

$$ f(x)=\int_0^\infty\widetilde{\omega}_{\mu,\nu}(xy)\,f(y)\,dy. \tag{1} $$

Пользуясь соотношениями между функциями Бесселя J_μ, J_ν и функцией Макдональда $K_{(\nu-\mu)/2}$, авторы показывают, что при $\nu\geqslant\mu$ решением уравнения (1) является функция

$$ f_{\mu,\nu}(x)=x^{(\mu+\nu+1)/2}K_{(\nu-\mu)/2}(x). $$

Применяя теорему Ганкеля к интегралу

$$ \int_0^\infty\frac{y^{-\nu}J_\nu(xy)\,dy}{(y^2+k^2)^{\nu+1/2}}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\left(\frac{2x}{k^2}\right)^\nu I_\nu\left(\frac{kx}{2}\right)K_\nu\left(\frac{kx}{2}\right), $$

авторы получают в случае $\nu=\mu=-1/4$ двойственную себе функцию $\psi_1(x)=x^{1/4}J_{-1/4}(x)\,K_{-1/4}(x)$.

Интеграл

$$ \int_0^\infty\frac{\sin(xy)\,dy}{\sqrt{y^2-1}}=\frac{\pi}{2}[I_0(x)-L_0(x)], $$

где $L_0(x)=\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-2}[\Gamma(n+1/2)]^{-2}$,

дает в случае $\nu=\mu=1/2$ двойственную себе функцию $\psi_2(x)=(\pi/2)[I_0(x)-L_0(x)]$.

Интеграл

$$ \int_0^\infty\frac{\cos(xy)\,dy}{\sqrt{y^2+1}}=K_0(x) $$

дает в случае $\nu=\mu=-1/2$ двойственную себе функцию

$$ \psi_3(x)=\int_0^\infty\frac{K_0(xy)\,dy}{\sqrt{y^2+1}}=\frac{\pi^2}{8}\left[J_0^2\left(\frac{x}{2}\right)+I_0^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]. $$

В случае $\nu=\mu=1$ интеграл

$$ \int_0^\infty\frac{y\,J_0(xy)\,dy}{\sqrt{y^2+1}}=J_0\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)K_0\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), $$

$$\int_0^\infty y\,J_0(xy)\,K_0(py)\,dy = \frac{1}{(x^2+p^2)},$$

$$\int_0^\infty y\,J_0(xy)\,[I_0(y) - L_0(y)]\,dy = \frac{2}{\pi x(1+x^2)}$$

дают двойственные себе функции

$$f_1(x) = x^{1/2}J_0(x/\sqrt{2})\,K_0(x/\sqrt{2}),$$

$$f_2(x) = x^{1/2}\int_0^\infty \frac{y^{1/2}K_0(xy)\,dy}{\sqrt{y^2+1}},$$

$$f_3(x) = x^{1/2}\int_0^\infty \frac{K_0(xy)\,dy}{y^2+1} - \frac{\pi}{4x^{1/2}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}x^{1/2}[H_0(x) - I_0(x)] - \frac{\pi}{4x^{1/2}}$$

и «косо» двойственную себе функцию, т. е. функцию, меняющую знак при преобразовании,

$$f_4(x) = \frac{\pi^2}{4}x^{1/2}[I_0(x) - L_0(x)] - \frac{\pi}{4x^{1/2}}.$$

Интеграл $\int_0^\infty J_0(xy)\,dy = 1/x$ дает в этом же случае двойственную себе функцию $x^{-1/2}$.

Переходя к общим свойствам решений уравнения (1), авторы показывают, что преобразование

$$\int_0^\infty x^{s-1}f(x)\,dx = 2^s\Gamma\left(\frac{\mu+s}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+s}{2}+\frac{1}{4}\right)\psi(s)$$

приводит уравнение (1) к виду

$$\psi(s) = \psi(1-s), \qquad (2)$$

причем допускается, что $f(x)$ аналитична в области $|\arg x| < \alpha \leqslant \pi$, при $x \to 0$ $f(x) = O(|x|^{-a+\varepsilon})$, а при $x \to \infty$ $f(x) = O(|x|^{a-1-\varepsilon})$, где $a < 1/2$, а ε — любое положительное число. Если $s = \sigma + it$, то $\psi(s)$ аналитична в полосе $a < \sigma < 1-a$ и при любом положительном η

$$\psi(s) = O(e^{(\pi/2-\alpha+\eta)|t|}).$$

В силу теоремы обращения преобразования Меллина каждому решению $\psi(s)$ уравнения (2), удовлетворяющему этим условиям, соответствует решение $f(x)$ уравнения (1) вида

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^s\Gamma\left(\frac{\mu+s}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+s}{2}+\frac{1}{4}\right)x^{-s}\psi(s)\,ds.$$

Ю. Л. Рабинович

5919. **О поле операторов Микусинского. Рыль-Нардзевский** (Sur le corps des opérateurs de Mikusiński. Ryll-Nardzewski C.), Studia math., 1954, **14**, № 2, 247—248 (франц.)

Доказывается, что поле Q операторов, получаемое расширением кольца непрерывных при $t \geqslant 0$ функций с обычным сложением и со сверткой в качестве умножения (РЖМат, 1955, 1343) алгебраически незамкнуто, а именно существует такой элемент $f \in Q$, что уравнение $x^2 = f$ неразрешимо в Q. За f можно взять функцию $t \sin \lg t$. J. Mikusinski

5920. **Обоснование алгебры физически наблюдаемых функций при помощи операций свертки. I. Точность, комплексы функций, точечные функции, преобразование Фурье комплекса, интегро дифференциальный оператор. II. Преобразование Фурье степенных рядов и рядов мультиполей. Связь с преобразованиями Лапласа и Меллина. Расширение теории функций. Хеземан, Багчи** (Begründung einer Algebra physikalisch beobachtbarer Funktionen mittels Faltungsoperationen. I. Präzisionen, Funktionenkomplex, Punktfunktionen, Fourier — Transformation eines Komplexes, Integro-Differentialoperator. II. Fourier-Transformation von Potenzreihen und Multipolreihen, Zusammenhang mit Laplace-und Mellin-Transformation. Eine Erweiterung der Funktionentheorie. Hosemann R., Bagchi S. N.), Z. Phys., 1953, **135**, № 1, 50—84; 1954, **137**, № 1, 1—30 (нем.)

Статьи содержат физическую трактовку некоторых понятий, близких к обобщенным функциям (распределениям) Л. Шварца. Впервые такая трактовка упоминается в работах Винера (Wiener N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, New-York, 1950) и Дирака (Dirac P. A. M., The principles of quantum mechanics, Oxford, 1951).

Изложение ведется независимо от математической теории обобщенных функций и в иных терминах. Наблюдаемой функцией $k(t)$ времени t является свертка «истинной» функции $g_0(t)$ и некоторой функции ошибок измерения $h(t)$ используемого инструмента измерения времени со средней ошибкой δt, $|t| \leqslant t_m$. Любая функция $g(t)$, которая в свертке с $h(t)$ дает функцию $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,h(t-u)\,du$, отличающуюся от $k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(u)\,h(t-u)\,du$ на сегменте $|t| \leqslant t_m$ меньше, чем на ошибку измерения, экспериментально неотличима от $g_0(t)$. Множество всех таких функций $g(t)$ называется комплексом g наблюдаемой функции k. Вместо хронометрирования функциональной зависимости можно измерять частоту ν преобразования Фурье

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{-2\pi i\nu t}dt.$$

Тогда наблюдаемой функцией явится свертка $G(\nu)$ с функцией ошибок $H(\nu)$ со средней ошибкой $\delta\nu \sim 1/t_m$, $|\nu| \leqslant \nu_m \sim 1/\delta t$. Соответствующим образом определяется комплекс G наблюдаемой функции K. В предположении, что h и H — нормальные законы распределений:

$$h(t) = e^{-(t/\delta t)^2}/\sqrt{\pi}\,\delta t; \quad H(\nu) = e^{-(\nu/\delta\nu)^2}/\sqrt{\pi}\,\delta\nu,$$

показывается, что комплекс g преобразованием Фурье переводится в комплекс G. Под точечными функциями, которые также образуют комплекс, понимаются функции $P(t)$ с интегралом, равным единице, «неразрешимые» при данной функции ошибок, т. е. такие, что их свертка с $h(t)$ в пределах ошибок измерения совпадает с h. Их преобразования Фурье для $|t| \leqslant t_m$ в пределах ошибок измерения равны единице. В пределе $\delta t \to 0$ комплекс вырождается в одну функцию, определенную с точностью до множества меры нуль; при этом точечные функции превращаются в импульсные функции Дирака. Под интегро-дифференциальным оператором понимается свертка функции с точечной функцией $P^{(n)}(t)$, переходящей в пределе в импульсную функцию порядка n (в операционном исчислении соответствует оператору p^n, n — целое). Во второй

атье теория функций в части преобразований Лапла- и контурного интегрирования распространяется на мплексы. При этом получается известное из теории общенных функций расширенное определение лога-ифмической функции, а также обоснование формаль-ого перехода от степенного ряда к ряду мультиполей обратно.

Примечание референта. Несмотря на то, что торы претендуют на «устранение недоверия», которое атематики питали до создания теории обобщенных ункций к формальным манипуляциям с импульсными ункциями и т. п., их изложение несвободно от прежних недостатков, и математически настроенный читатель, не имея основания сомневаться в справедливости сновных результатов, не может согласиться как с оказательствами с теми доводами и выкладками, которые приводятся в обоснование этих результатов. Изложение всей работы на базе теории распределений вместо простой ссылки на эту теорию) значительно облегчило бы ее понимание и сделало бы весьма интересные рассмотрения более убедительными.

В. И. Левин

5921. **Некоторые теоремы операционного исчисления. Бос** (On certain theorems in operational calculus. Bose B. N.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1952, 44, № 3, 93—110 (Журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Рассматривается преобразование Лапласа—Карсона

$$\varphi(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Доказываются следующие предложения.

Теорема I. Если 1) $\varphi(x)$ двойственна себе относительно синус-преобразования, т. е.

$$\varphi(x) = \sqrt{2/\pi}\int_0^\infty \varphi(y)\sin xy\,dy,$$

2) интегралы $\int_0^1 |f(x)|\,dx$ и $\int_1^\infty |f(x)|\,dx$ сходятся, 3) $f(0) = f(\infty) = 0$, 4) $f'(x)$ непрерывна, то $f'(x)$ двойственна себе относительно косинус-преобразования, т. е. $f'(x) = \sqrt{2/\pi}\int_0^\infty f'(y)\cos xy\,dy$. Имеет место обращение этого предложения (Теорема II).

Теорема III. Если $\varphi(x)/x$ двойственна себе относительно косинус-преобразования, $f(x)$ — непрерывная функция, то в предположении сходимости интегралов $\int_0^1 |f(x)|\,dx$ и $\int_1^\infty x\,|f(x)|\,dx$, $f(x)$ двойственна себе относительно синус-преобразования. Имеет место обращение этого предложения (Теорема IV). Теоремы V—XII дополняют вышеуказанные предложения.

Функция $x^{n+1/2}\varphi(x)$ называется двойственной себе относительно преобразования Ганкеля n-го порядка, если

$$x^{n+1/2}\varphi(x) = \int_0^\infty (xy)^{1/2} J_n(xy)\, y^{n+1/2}\varphi(y)\,dy.$$

Теорема XIII. Если $x^{-n+1/2}f'(x)$ двойственна себе относительно преобразования Ганкеля $(n+1)$-го порядка, то $x^{n+1/2}\varphi'(x)$ двойственна себе относительно преобразования Ганкеля n-го порядка, если только интегралы $\int_0^1 x\,|f'(x)|\,dx$ и $\int_1^\infty x^{-n+1/2}\,|f'(x)|\,dx$ сходятся и существует интеграл

$$\int_0^\infty (yx)^{1/2} J_n(yx)\, x^{n+1/2}\varphi'(x)\,dx.$$

Имеет место обращение этого предложения (Теорема XIV).

Теорема XV. Если $f(0) = 0$ и $x^{-n-1/2}f'(x)$ двойственна себе относительно преобразования Ганкеля $(n+1)$-го порядка, то $x^{n+1/2}\varphi(x)$ двойственна себе относительно преобразования Ганкеля n-го порядка в случае сходимости интеграла

$$\int_0^\infty (yx)^{1/2} J_n(yx)\, x^{n+1/2}\varphi(x)\,dx$$

и выполнения условий, необходимых для изменения порядка интегрирования, встречающегося при доказательстве. Имеет место обращение этого предложения (Теорема XVI). П. И. Кузнецов

5922. **Преобразования Лапласа некоторых целых функций. Салинас** (Laplace transforms of some entire functions. Salinas Baltasar R.), Gac. mat., 1953, (1) 5, 157—158 (исп.).

Перевод из Math. Revs. 1954, 15, № 6, 524

5923. **Некоторые преобразования Фурье функций распределения. II. Лукач, Сас** (Certain Fourier transforms of distributions. II. Lukacs Eugene, Szász Otto), Canad. J. Math., 1954, 6, № 2, 186—189 (англ.)

Ч. I см. Canad. J. Math., 1951, 3, 140—144.

Если рациональная функция $\varphi(t)$ есть характеристическая функция (преобразование Фурье монотонной ограниченной меры), то: 1) $\varphi(t)$ не имеет полюсов на вещественной оси; все полюсы и корни $\varphi(t)$ или чисто мнимы или располагаются по парам $\pm b + ia$, симметричным относительно мнимой оси; 2) если $b + ia$ ($b \neq 0$, $a \neq 0$) есть полюс $\varphi(t)$, то имеется и полюс $i\alpha$, $|\alpha| \leqslant |a|$, $\operatorname{sgn}\alpha = \operatorname{sgn} a$; 3) если ia — ближайший к оси абсцисс полюс $\varphi(t)$, то его кратность не меньше кратности возможных полюсов $\pm b \pm ia$; 4) если имеется только одна пара полюсов $\pm b + ia$ с заданным a и их кратность s равна кратности полюса в ia, то

$$A_{1,s}a^s - 2\,|C_{1,s}|\,(a^2 + b^2)^{s/2} \geqslant 0,$$

где $A_{1,s}$ и $C_{1,s}$ суть коэффициенты в разложении $\varphi(t)$ на простейшие дроби соответственно при слагаемых

$$\left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-s} \text{ и } \left(1 - \frac{it}{a+ib}\right)^{-s}.$$

О достаточности высказанных условий (для того, чтобы данная рациональная функция была характеристической) ничего не сказано. Г. Е. Шилов

5924. **Об оценке величины преобразований Фурье. Фукс** (On the magnitude of Fourier transforms. Fuchs Wolfgang Heinrich J.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 106—107 (англ.)

Пусть $g(t)$ — функция с интегрируемым квадратом, определенная в евклидовом пространстве $E[t = (t_1, \ldots, t_n)]$ n измерений. Положим $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $tx = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$, $G(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_E g(t)\,e^{itx}dt$. Пусть S и T — два множества конечной меры в E и $\lambda(S, T)$ — наибольшее собственное значение интегрального уравнения

$$\mu y(t) = (2\pi)^{-n}\int_T y(s)\int_S e^{-i(t-s)u}du\,ds.$$

Теорема 1. Из $\int_E |g(t)|^2\,dt = 1$, $\int_T |g(t)|^2\,dt = A$ следует

$$\int_S |G(x)|^2\,dx \leqslant \mu^2(A),$$

где $\mu(A) = 1$, если $[A \leqslant \lambda(S,T)]$, и $\mu(A) = [A\lambda(S,T)]^{1/2} + [(1-A)\{1-\lambda(S,T)\}]^{1/2}$, если $A > \lambda(S,T)$. Граница μ^2 достижима во всех случаях.

Теорема 2. Пусть $F(t)$ — одномерная функция распределения, $Q(b) = \sup\{F(t+b+0) - F(t-0)\}$ — ее «функция концентрации» и $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\,dF(x)$ — ее характеристическая функция. Если для некоторого $b < +\infty$, $Q(b) = 1$, то $\sup|f(x)| \geqslant 1/\mathrm{ch}(ab/2)$. Если $f(x) = 0$ при $|x| > a$, то $Q(b) \leqslant \lambda(S,T)$, где S — интервал $|t| < b/2$, T — интервал $|x| < a/2$, а $\lambda(S,T)$ имеет то же значение, что в теореме 1.

Заметка не содержит доказательств. А. Я. Хинчин

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

5925. **О некоторых расходящихся интегралах квантовой электродинамики. Гонсалес-Домингес** (Sobre algunas integrales divergentes de la electrodinámica cuántica. Gonzalez Dominguez Alberto), 2° symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Villavicencio-Mendoza, julio 1954, Montevideo, Centro coop. cient, UNESCO América Latina, 1954, 53—60 (исп.)

При определении матрицы рассеяния в квантовой теории поля возникают расходящиеся интегралы от больших импульсов. Для придания конечного смысла этим интегралам рядом авторов был разработан вычитательный формализм.

Автор пытается показать, что систематическое использование понятия «конечной части расходящегося интеграла» фактически содержит в себе способ вычитания Дайсона, регуляризацию Паули-Вилларса и т. д.

Так, например, в случае расходящегося интеграла

$$I = \int_2^\infty \frac{x\,dx}{x+a}$$

имеем

$$I_{\text{Dyson}} = \int_2^\infty \left\{\left[1+\frac{a}{x}\right]^{-1} - 1 + \frac{a}{x}\right\} dx$$

и

$$\mathrm{Pf}\int_2^\infty \frac{x}{a+x}\,dx = \int_2^\infty \left\{\left[1+\frac{a}{x}\right]^{-1} - 1 + \frac{a}{x}\right\} dx - 2 + a\lg 2,$$

т. е. оба значения отличаются только на константу.

Следует однако отметить, что свое предположение автор не доказывает, ограничиваясь его проверкой на простейших примерах. О. С. Парасюк

5926. **Некоторые возмущенные электростатические поля. Пауэр** (Some perturbed electrostatic fields. Power G.), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 1, 79—98 (англ.)

Вычисляются сила и момент, действующие на тело, внесенное в электростатическое поле, для некоторых простых контуров в плоском случае (окружность, эллипс) и простых тел (шар) в трехмерном поле. В плоско-параллельном поле предполагается известным комплексный потенциал невозмущенного поля (в виде степенного ряда) и применяются дробно-линейные отображения и отображение при помощи функции Жуковского. В пространственном случае применяется функция Стокса. В. И. Левин

См. также: 5534 К, 5553, 5578, 5700, 5729, 5733, 5734, 5741, 5773, 5805, 5821 К, 5825 Д, 5844, 5859, 5863, 5956, 6120

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

5927. **Обобщенная теория наилучших приближений. Татаркевич** (Une théorie généralisée de la meilleure approximation. Tatarkiewicz Krzysztof), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1952, A6,31—46 (Журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц., резюме польск., русс.)

Пусть $Z = \{z_n\}$ — система линейно независимых элементов банахова пространства. Пусть Z_n — линейная оболочка элементов $z_1, \ldots, z_n$. Тогда для каждого n существует $y \in Z_n$ такой, что $\mathrm{dist}(a, Z_n) = \|a - y\|$. Множество этих элементов y обозначается $A_n(a)$. (Множество Z_n не компактно, поэтому доказательство непустоты $A_n(a)$ должно быть изменено — *Реф.*) Система Z называется U-системой, если для любых n и a множество $A_n(a)$ состоит только из одного элемента. Следующее условие необходимо и достаточно для того, чтобы система Z была U-системой; если $y \in A_n(a)$ и если на сфере $K(a,1)$ существует сегмент Δ, содержащий элемент $(a-y)\,\|a-y\|^{-1}$, то множество Z_n не содержит сегментов, параллельных Δ (оригинальная формулировка автора, эквивалентная данной, использует специальные определения). Преобразование $x \to A_n(x)$ полунепрерывно в следующем смысле: если $x_p \to x_0$, то $\operatorname{Ls}_{p\to\infty} A_n(x_p) \subset A_n(x_0)$, где Ls означает верхний топологический предел; если $A_n(x_0)$ состоит из одного элемента, то множество в левой части вышеприведенного включения не пусто. В заключение автор доказывает некоторые свойства функционала $\mu_n(a) = \mathrm{dist}(a, Z_n)$. A. Alexiewicz

5928. **О теореме Важевского. Алексевич** (On a theorem of Ważewski. Alexiewicz A.), Roczn. Polskiego towarz, mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1953, 24, № 2, 129—131 (англ.)

Пусть V — замкнутое подмножество пространства Банаха X. Пусть $x(t)$ — слабо непрерывная функция, определенная в интервале $I = [a,b]$ со значениями в X, а $\varphi(t)$ — действительная функция, определенная в I и возрастающая. Если для всякого $t \in I$, за исключением не более чем счетного множества, существует последовательность действительных чисел $\tau_n \to 0+$, и последовательность элементов $y_n \in V$ такие, что последовательность

$$\frac{x(t+\tau_n) - x(t)}{\varphi(t+\tau_n) - \varphi(t)} - y_n \qquad (1)$$

бо сходится к 0 при $n \to \infty$, то для всяких $t \in I$ и $\neq 0$

$$\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\varphi(t+\tau)-\varphi(t)} \in V.$$

теорема является усилением аналогичного результата Важевского, касающегося сильно непрерывных функций $x(t)$, для которых последовательность (1) сильно сходится. Автором дается также аналогичное усиление данного Важевским правила Лопиталя для абстрактных функций.

Следующая теорема дает ответ на вопрос Важевского (Ważewski T., Bul. Int. Acad. Pol., sér. A, 1949, 3—185): Существует функция $x(t)$, отображающая интервал I в сепарабельное пространство Банаха, удовлетворяющая условию Липшица и такая, что для некоторого $t \in I$ и всякой последовательности $\tau_n \to 0$ последовательность $[x(t+\tau_n)-x(t)]/\tau_n$ слабо расходится. K. Maurin

5929. О наименьшем радиусе сферы, содержащей данное множество n непрерывных функций. Волков В. И., Уч. зап. Калининск. пед. ин-та, 1953, 16, 3—6

Пусть $d > 0$ и $S(d) = \{f_k(x)\}$ — такое множество из n непрерывных функций, заданных на $[a, b]$, для которого $\max_{i,k,x} |f_k(x) - f_i(x)| = d$. Пусть $\Psi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)$. Если

$$R = \max_{S(d)} \{ \min_{c_1,\ldots,c_n} [\max_{k,x} |f_k(x) - \Psi(x)|] \},$$

то $R = d(n-1)/n$. И. П. Натансон

5930. Аддитивные интегралы. Йонеску-Тулча (Integrale aditive. Ionescu Tulcea C. T.), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1954, 4, № 9-10, 471—477 (рум.; резюме русс., франц.)

Риманов интеграл числовой или векторной функции на множестве E по мере μ определяется как предел сумм

$$Sf(\Delta) = \sum_{A \in \Delta} f(A)\,\mu(A)$$

по фильтру F, образованному дроблениями множества E. Аддитивность и однородность интеграла являются непосредственными следствиями свойств предела и имеют место для всякого интеграла.

Аддитивность интеграла как функции множества имеет место только в том случае, когда фильтр $\mathscr{F}$ удовлетворяет некоторым специальным условиям.

В данной заметке вводятся на множествах дроблений E законы композиции, позволяющие просто выразить условия, налагаемые на фильтр $\mathscr{F}$, и определяются интегралы для функций множеств, значения которых принадлежат однородной полугруппе. Резюме автора

5931. FK-пространства. Целлер (*FK*-Räume. Zeller Karl), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 188 (нем.)

Дается краткое описание теории *FK*-пространств (определения *FK*-пространств см., например, РЖМат, 1954, 2246) и их применения к различным математическим вопросам. Указывается, что теорию, аналогичную теории *FK*-пространств, основанных на числовых последовательностях, можно развить, взяв за основу функциональные последовательности. Л. Д. Кудрявцев

5932. О биортогональных системах. Дьёдонне (On biorthogonal systems. Dieudonné Jean), Michigan Math. J., 1953—1954, 2, № 1, 7—20 (англ.)

Дается обзор теории биортогональных систем в линейных пространствах. Целью автора является систематическое изложение упомянутой теории при наиболее общих предположениях. Бо́льшая часть результатов представляет собой более или менее очевидное обобщение соответствующих теорем о биортогональных системах в банаховых пространствах. Г. П. Акилов

5933. Симметризуемые линейные преобразования. Лакс (Symmetrizable linear transformations. Lax Peter D.), Communs Pure and Appl. Math., 1954, 7, № 4, 633—647 (англ.)

Пусть B — комплексное пространство Банаха, в котором определено скалярное произведение (x, y) $(x, y \in B)$, удовлетворяющее условию $\|x\| \leqslant k|x|$, где $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, k — постоянная величина, а $|x|$ — норма в пространстве B. Многообразие B можно расширить до полного пространства Гильберта H. Рассматривая линейное ограниченное преобразование T в пространстве B, для которого выполняется условие $(Tx, y) = (x, Ty)$ $(x, y \in B)$, автор доказывает следующие теоремы:

1) T — ограниченное преобразование по отношению к гильбертовой норме.

2) Спектр преобразования T в пространстве H является подмножеством спектра T в B.

3) Если λ принадлежит точечному спектру преобразования T в пространстве B, то λ принадлежит точечному спектру T в H. Собственные векторы оператора T в пространствах B и H совпадают. Отсюда, в частности, следует, что симметричный вполне непрерывный оператор в B является вполне непрерывным и в H.

Указанные теоремы применяются для доказательства ограниченности некоторых квадратичных форм, а также к задачам с начальными данными для уравнений гиперболического типа и к исследованию поведения собственных функций эллиптического оператора второго порядка на границе области.

Теоремы 1—3 были ранее установлены М. Г. Крейном (Збірник праць Ін-ту математики АН УРСР, 1947, № 9, 104—128) и использованы для вывода теорем Гильберта—Шмидта, Мерсера и асимптотических значений собственных чисел вполне непрерывных операторов. М. С. Лившиц

5934. Спектральное разложение операторов с линейным спектром. Вольф (Spectral decomposition of operators with a linear spectrum. Wolf František), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 186—187 (англ.)

В банаховом пространстве рассматриваются ограниченные операторы A, спектр которых $\sigma(A)$ лежит на ограниченной части прямой линии или на единичной окружности, а спектральное разложение функций от A имеет вид

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d^n E(\lambda),$$

где $f(\lambda)$ принадлежит пространству $C^{(n)}$ функций, n раз непрерывно дифференцируемых в некотором открытом множестве, содержащем $\sigma(A)$, а интеграл понимается в смысле Бохнера (Bochner S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932). Класс операторов, допускающих такое разложение, характеризуется каждым из следующих свойств: 1) $R_\lambda(A) = O(r^{-n+2})$, где r — расстояние от λ до $\sigma(A)$; 2) отображение многочленов $f(\lambda)$ в операторы $f(A)$ непрерывно в смысле топологии $C^{(n)}$ для $f(\lambda)$ (но не сказано, в смысле какой топологии для $f(A)$. *Реф.*); 3) (в случае спектра на единичной окружности) $\|A^k\| \leqslant Mk^{n-1}$ (? — *Реф.*). Сжато формулируются некоторые спектральные свойства этих операторов. Доказательства отсутствуют. М. К. Фаге

5935. Линейные функционалы в $K_{p,q}$, $B_{p,q}$. Сард (Linear functionals on $K_{p,q}$ $B_{p,q}$. Sard Arthur), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 167—168 (англ.)

Пусть p, q — положительные целые числа и $n = p+q$; U — прямоугольник $\alpha_1 \leqslant s \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant t \leqslant \beta_2$; $(a, b) \in U$. $K_{p,q}$ — пространство функций $x = x(s, t)$, $(s, t) \in U$, для которых производные

$$x_{i,j}(s,t),\ i<p,\ j<q;\quad x_{i,j}(a,t),\ j \geqslant q,\ i+j<n;$$
$$x_{i,j}(s,b),\ i \geqslant p,\ i+j<n$$

существуют и непрерывны. Порядок дифференцирований в этих производных, если $j \geqslant q$ или если $i \geqslant p$, ограничен некоторым условием: в первом случае, например, последние $j-q+1$ дифференцирований производятся по t. Нормой элемента $x \in K_{p,q}$ является наибольший из максимумов абсолютных величин упомянутых производных. Аналогично определяется и пространство $B_{p,q}$. Оба эти пространства служат обобщениями соответственно пространств C_{n-1} и C_n, где C_ν есть пространство функций $x = x(s)$ с непрерывной ν-й производной в линейном интервале.

Пространства $K_{p,q}$, $B_{p,q}$ представляют интерес, поскольку именно для принадлежащих им функций существуют различные разложения, аналогичные формуле Тейлора с остаточным членом в виде интеграла. Интересны и сопряженные пространства, т. е. пространства линейных функционалов в $K_{p,q}$, $B_{p,q}$: многие остаточные члены приближенных формул для интегралов, производных или значений функций двух переменных являются линейными функционалами в $K_{p,q}$ или $B_{p,q}$.

Автор устанавливает вид линейных функционалов в этих пространствах. Основная теорема для $K_{p,q}$:

Пусть F — линейный функционал в $K_{p,q}$. Тогда существуют единственные постоянные $c^{i,j}$, $i+j<n$, и единственные функции $\rho^i(t)$, $i<p$; $\sigma^j(s)$, $j<q$; $\tau(s,t)$, которые имеют ограниченное изменение, обращаются в нуль при $s=\alpha_1, \alpha_2$ или $t=\beta_1, \beta_2$ и непрерывны сверху, исключая разве лишь случаи, когда $s=\alpha_1$ или $t=\beta_1$ — такие, что для всех $x \in K_{p,q}$

$$Fx = \sum_{i+j<n} c^{i,j} x_{i,j}(a,b) + \sum_{\substack{i+j=n-1 \\ i<p}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} x_{i,j}(a,t)\, d\rho^i(t) +$$
$$+ \sum_{\substack{i+j=n-1 \\ j<q}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x_{ij}(s,b)\, d\sigma^j(s) + \iint_U x_{p-1,q-1}(s,t)\, d\tau(s,t).$$

Даются формулы для $c^{i,j}$, ρ^i, σ^j, τ. Результаты обобщаются и на случай функций многих переменных.

Г. М. Фихтенгольц

5936. Обратные бесконечных матриц и обратные линейных операторов. Кук (Reciprocals of infinite matrices and inverses of linear operators. Cooke Richard George), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 92 (англ.)

Отмечается, что понятия обратной бесконечной матрицы и обратного линейного оператора, вообще говоря, не совпадают.

М. А. Наймарк

5937. Компактные линейные операторы в линейных топологических пространствах. Вильямсон (Compact linear operators in linear topological spaces. Williamson J. H.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, part 2, № 114, 149—156 (англ.)

Пусть E — линейное топологическое пространство. Линейный оператор U отображающий E в себя, называется компактным, если существует такая окрестность N_0 нулевого элемента пространства E, $U(N_0)$ — компактное множество.

Изучается уравнение

$$Tx = y,\quad T = I - U,\quad x \in E,\quad y \in E,$$

где I — тождественный оператор.

В работе существенно используются некоторые результаты Лерэй (Leray J., Acta Sci. Math. Szeged, 19[illegible] B12, 177—186), изучавшего уравнение (1) в частном случае локально выпуклых линейных топологических пространств.

Доказывается справедливость «альтернативы Фредгольма» для уравнения (1): либо T отображает E на себя взаимно однозначно и взаимно непрерывно, либо существует элемент $x \in E$, $x \neq 0$, такой, что $Tx = 0$.

Доказывается, что из компактности линейного оператора в пространстве E вытекает существование [illegible] прерывных линейных функционалов, определенных [illegible] E. Через $\overline{T}^r(0)$ обозначается подпространство [illegible] ментов $x \in E$, удовлетворяющих уравнению $T^r x = 0$. [illegible] пользуясь компактностью сопряженного оператора U [illegible] автор доказывает, что размерность $\overline{T}^r(0)$ равна ра[illegible] мерности $\overline{T^*}^r(0)$ для $r = 1, 2, \ldots, n$, где n — наименьш[illegible] положительное число, для которого справедливо р[illegible] венство $T^{n+1}(E) = T^n(E)$. (Существование такого [illegible] доказано в цитированной работе Лерэя, там же док[illegible] зано, что подпространство $\overline{T}^n(0)$ конечномерно).

Примечание референта. В реферируемой работе делается предположение о том, что требование локальной выпуклости пространства может оказаться излишним для построения по крайней мере части теории компактных линейных операторов. Это предположение опровергается результатами Альтман (РЖМат, 1955, 1846). Альтман, в случае локально выпуклого пространства, кроме доказательства предложений, содержащихся в реферируемой работе, вводит топологию в сопряженном пространстве, распространяет теорему Шаудера о компактности сопряженного оператора и обобщает известные для пространств Банаха теоремы о разрешимости уравнения (1) и уравнения

$$T^*X = Y,\quad X \in E^*,\quad Y \in E^*.$$

Д. Ф. Харазов

5938. Компактные множества в выпуклых топологических линейных пространствах. Птак Властимил, Чехосл. матем. ж., 1954, 4(79), № 1, 51—74

Обозначения и терминологию см. в РЖМат, 1955, 4542. Основной результат работы — теорема (1,12). Поляры к бикомпактным множествам из пополнения пространства (X, u) образуют фундаментальную систему окрестностей нуля наиболее сильной топологии на Y, индуцирующей слабую топологию на каждом U^* (или, что равносильно, — оставляющей каждое U^* бикомпактным. *Реф.*). В слабой топологии на Y (из X) они характеризуются как почти замкнутые симметричные выпуклые тела, отсекающие на каждом U^* слабую окрестность нуля. В § 2 строится пример неполного пространства, в котором замыкание каждого вполне ограниченного множества бикомпактно. (Самый факт существования таких пространств не нов, и они даже получили особое наименование «квазиполных» пространств; к ним относятся, например, пространства, сопряженные к банаховым, рассматриваемые в слабой топологии. *Реф.*). § 3 содержит некоторые замечания

понятию B-полноты и доказательство того, что всякое линейное пространство в «сильнейшей» (автор называет ее «натуральной») топологии является полным, если оно не B-полно, если его можно топологизировать как банахово пространство. Д. А. Райков

5939. О локально выпуклых линейных пространствах непрерывных функций. Сирота (On locally convex vector spaces of continuous functions. Shirota Taira), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 4, 294—298 (англ.)

Пусть X — вполне регулярное топологическое пространство. Множество $\mathfrak{C}(X, R)$, состоящее из всех непрерывных на X вещественных функций, оказывается локально-выпуклым линейным топологическим пространством, если под окрестностью функции $f_0 = 0$ понимать совокупность всех $f \in \mathfrak{C}(X, R)$ таких, что

$$|f(x)| < \varepsilon \quad (x \in X_0),$$

где $\varepsilon > 0$ — вещественное, а множество $X_0 \subset X$ компактно.

Изучаются свойства пространства $\mathfrak{C}(X, R)$ в зависимости от свойств пространства X. Г. П. Акилов

5940. Об одной теореме Банаха. Кордуняну (Asupra unei teoreme a lui S. Banach. Cordunea nu C.), Studii şi cercetări ştiinţ., 1954, 5, № 1-2, 39—43 (рум.; резюме русс., франц.)

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — последовательность функций, определенных на топологическом пространстве R и принимающих значения в метрическом компактном пространстве S. Для того чтобы последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходилась равномерно на R к функции $\varphi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой функции $f \in B(S)$ (где $B(S)$ обозначает пространство Банаха действительных непрерывных функций на S) последовательность $\{f(\varphi_n(x))\}$ сходилась равномерно на R к $f(\varphi(x))$. Если $H(S)$ — группа гомеоморфизмов пространства S, снабженная топологией равномерной сходимости, а $I(B(S))$ — группа тех изометрий пространства $B(S)$ с топологией сильной сходимости линейных операторов, для которых функции 0 и 1 инвариантны, то соответствие

$$\Phi(f) = f(\varphi),$$

где Φ — изометрия в $B(S)$ такая, что $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 1$; φ — гомеоморфизм S на себя и $f \in B(S)$, между $H(S)$ и $I(B(S))$ является антиизоморфным и гомеоморфным. Резюме автора.

5941. Аналитические функции от преобразований Фурье. Аренс, Кольдерон (Analytic functions of Fourier transforms. Arens R. F., Calderon A. P.), 2° symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Villavicencio-Mendoza, julio 1954, Montevideo, Centro coop. cient., UNESCO América Latina, 1954, 39—52 (англ.)

Пусть G локально-компактная счетно-компактная абелева группа, а Γ ее группа характеров. Каждой вполне аддитивной бэровской функции множеств μ ограниченной вариации на Γ соответствует функция на G (преобразование Фурье-Стилтьеса),

$$\hat{\mu}(\chi) = \int_\Gamma \chi(g)\, d\mu(g).$$

Функции $\hat{\mu}(\chi)$ образуют нормированное кольцо с обычным умножением и нормой — полной вариацией. Авторы, опираясь на свои результаты из общей теории нормированных колец, еще не появившиеся в печати, дают условия существования в данном кольце аналитической функции от n элементов кольца.

В случае, когда меры μ дискретны, а их преобразования $\hat{\mu}$ соответственно почти периодичны, формулировка условий упрощается и получается, в частности, такой результат: если G связная группа, $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \ldots, \hat{\mu}_n$ — почти периодичны и $\varphi(\chi)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi^n + \hat{\mu}_1\varphi^{n-1} + \ldots + \hat{\mu}_{n-1}\varphi + \hat{\mu}_n = 0 \text{ и}$$

$$|n\varphi^{n-1} + (n-1)\hat{\mu}_1\varphi^{n-2} + \ldots + \hat{\mu}_{n-1}| > \varepsilon > 0,$$

то $\varphi(\chi)$ — почти периодична. Ю. А. Шрейдер

5942. О L^1-пространствах на группах. II. Рейтер (Über L^1-Räume auf Gruppen. II. Reiter Hans), Monatsh. Math., 1954, 58, № 3, 172—180 (нем.)

Часть I см. РЖМат, 1955, 4551.

Пусть G — локально-компактная группа, g — ее замкнутая абелева подгруппа, причем в G/g есть инвариантная мера. Тогда при соответствующей нормировке меры в G/g для всех f из $L^1(G)$ имеем

$$\inf \int_G |f(x) - \Sigma_{n=1}^N b_n f(x\sigma_n)|\, dx = \int_{G/g} dx' \left| \int_g f(x\xi)\, d\xi \right|,$$

где N пробегает все натуральные числа, b_n — комплексные числа такие, что $\Sigma_{n=1}^N b_n = 0$ и $\sigma_n \in g$. Если $I^{(g)}$ замкнутое линейное подпространство в $L^1(G)$, содержащее вместе с любой функцией $k(x)$ функцию $k(x\sigma)$, $\sigma \in g$, и $I_0^{(g)}$ — замкнутое линейное подпространство, натянутое на все конечные линейные комбинации $\Sigma b_n f(x\sigma_n)$, $\Sigma b_n = 0$, $\sigma_n \in g$, $f \in I^{(g)}$, то $I_0^{(g)}$ совпадает с множеством функций $f_0(x)$ из $I^{(g)}$, для которых $f_0'(x') \equiv \int_g f_0(x\xi)\, d\xi = 0$, и фактор-пространство $I^{(g)}/I_0^{(g)}$ алгебраически изоморфно и изометрично подпространству в $L^1(G/g)$, на которое отображается $I^{(g)}$ преобразованием $Tf(x) = \int_g f(x\xi)\, d\xi$. Н. Я. Виленкин

5943. О сохраняющих положительность полугруппах преобразований в $C[r_1, r_2]$. Феллер (On positivity preserving semigroups of transformations on $C[r_1, r_2]$. Feller W.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.) 1952, 25, 85—94 (Журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть $C[r_1, r_2]$ — пространство Банаха непрерывных функций $x = x(s)$ $(r_1 \leqslant s \leqslant r_2)$ с нормой $\|x\| = \sup |x(s)|$. Пусть $\{T_t\}$ $(t > 0)$ — полугруппа линейных преобразований пространства $C[r_1, r_2]$ в себя с нормами, не превосходящими 1, слабо измеримых и сохраняющих положительность (т. е. $x \geqslant 0$ влечет $T_t x \geqslant 0$ для всех $t > 0$).

Инфинитезимальный порождающий оператор Ω ($\Omega x = \lim_{h \to 0} h^{-1}(T_h - I)x$) называется порождающим оператором локального характера, если для каждого $\xi \in [r_1, r_2]$ и каждого $x \in C[r_1, r_2]$, обращающегося в нуль некоторой окрестности ξ, последовательность чисел $h^{-1}(T_h - I)x(s)|_{s=\xi}$ сходится к нулю.

Пусть $D \subset C[r_1, r_2]$ — область определения оператора Ω. Точка $\xi \in [r_1, r_2]$ называется регулярной, если для произвольной тройки чисел p_0, p_1, p_2 существует функция $x \in D$ такая, что

$$x(\xi) = p_0,\ x'(\xi) = p_1, \quad x''(\xi) = p_2.$$

При условии, что функции, принадлежащие D, дважды дифференцируемы, автор доказывает, что в каждой точке регулярности инфинитезимальный порождающий оператор Ω совпадает с дифференциальным оператором $a(s)(d^2/ds^2) + b(s)(d/ds) + c(s)$, где

$a(s) \geqslant 0$ и $c(s) \leqslant 0$. В работе даны также приложения этой теоремы к теории стохастических процессов (процессы диффузии). K. Urbanik

5944. **О бесконечно малом производящем операторе полугруппы положительных операторов локального характера. Лидер** (On the infinitesimal generator of a semigroup of positive transformations with local character condition. Leader Solomon), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 401—406 (англ.)

Рассматривается однопараметрическая полугруппа $\{T_t\}$ $(t > 0)$ линейных операторов в пространстве C ограниченных непрерывных функций f, заданных на замкнутом интервале I, со следующими свойствами:

a) Если $f(x) \geqslant 0$ для всех x из I, то $T_t f(x) \geqslant 0$ для всех x и t.

b) Если f равна нулю в какой-либо окрестности точки x, то $T_t f(x) = o(t)$.

c) $T_t 1 = 1$ для всех t.

Производящий оператор полугруппы

$$\Omega f(x) = \lim_{t \to 0+} \{[T_t f(x) - f(x)]/t\}$$

задается на множестве D функций f, для которых этот предел существует равномерно по x. Феллер (реф. 5943) показал, что если все функции, принадлежащие D, дважды дифференцируемы, то Ω представляет собой дифференциальный оператор вида

$$\Omega f(x) = a(x) f''(x) + b(x) f'(x) \qquad (a(x) \geqslant 0).$$

Автор рассматривает функции, обращающиеся в нуль в некоторой фиксированной точке x. Основной результат статьи:

Когда точка x выбрана, справедливо одно из следующих утверждений:

1) $\Omega f(x) = 0$ для всех f из D.

2) $\Omega u(x) = 0$ для всех u, монотонных в окрестности x, но D содержит функцию v, неотрицательную в окрестности x, для которой $\Omega v(x) > 0$. Тогда для любой f из D существует такое число ρ, что $f = \rho v + o(v)$ (вблизи x) и $\Omega f(x) = \rho \Omega v(x)$.

3) Для всех v из D, неотрицательных в окрестности x, $\Omega v(x) = 0$; но D содержит функцию u, строго возрастающую в окрестности x, для которой $\Omega u(x) \neq 0$. Тогда для любой f из D существует такое число σ, что $f = \sigma u + o(u)$ (вблизи x) и $\Omega f(x) = \sigma \Omega u(x)$.

4) D содержит функцию u, строго монотонную в окрестности x, для которой $\Omega u(x) \neq 0$, и функцию v, неотрицательную в окрестности x, для которой $\Omega v(x) > 0$, причем любая f из D может быть представлена в виде $f = \sigma u + \rho v + h$, где $h = o(u) = o(v)$ (вблизи x). Тогда $\Omega f(x) = \sigma \Omega u(x) + \rho \Omega v(x)$.

Д. А. Васильков

5945. **Спектральное разложение гипермаксимальных операторов в гильбертовых пространствах, распадающихся путем разделения переменных, Кордес** (Die Spektralzerlegung von hypermaximalen Operatoren Hilbertscher Räume, die durch Separation zerfallen. Cordes Heinz Otto), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 93 (нем.)

Рассматривается задача о собственных значениях $(A^1 s^2 + A^2 t^1)\varphi = \lambda (s^1 s^2 + t^1 t^2)\varphi$, где 1) A^j, s^j, t^j, $j = 1, 2$, — линейные операторы в гильбертовом пространстве; 2) A^1, s^1, t^1 попарно перестановочны с A^2, s^2, t^2; 3) s^j и t^j перестановочны. Основной результат состоит в интегральном представлении спектральной функции E_λ этой задачи о собственных значениях через спектральные функции $E^1_\sigma(\lambda, \mu)$, $E^2_\sigma(\lambda, \mu)$ операторов $A^1 - \lambda s^1 - \mu t^1$, $A^2 - \lambda t^2 - \mu s^2$. Указывается возможность применения этого результата к дифференциальным операторам в частных производных. M. A. Наймарк

5946. **Спектральная теория одного класса ненормальных операторов, Гоншор** (Spectral theory for a class of non-normal operators. Gonshor Harry), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 112—113 (англ.)

Спектральная теория операторов распространяется на операторы, представляемые в виде прямой континуальной суммы (прямого интеграла) операторов вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, где A — матрица порядка не выше фиксированного n.

Дается описание спектрального разложения при $n = 3$ и отмечается, что уже при $n = 3$ пространство, на котором задается спектральная функция, имеет весьма сложный вид. M. A. Наймарк

5947. **Замечания о некоторых операторах в квантовой теории поля. Патнам** (Remarks on certain operators of quantum field theory. Putnam C. R.), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 3, 350—354 (англ.)

Доказывается следующая теорема:

Пусть A — замкнутый линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathfrak{D}_A$ плотной в $\mathfrak{H}$ и пусть

$$AA^* - A^*A = 1 \quad \text{на множестве} \quad \Omega = \mathfrak{D}_{AA^*} \cap \mathfrak{D}_{AA^*}, \qquad (1)$$

$$\mathfrak{D}_{AA^*} = \mathfrak{D}_{A^*A}. \qquad (2)$$

Тогда: а) A^*A — самосопряженный оператор, спектр которого состоит только из собственных значений $0, 1, 2, 3, \ldots$; б) операгор A имеет точечный спектр, состоящий из всех комплексных чисел.

Оператор A, удовлетворяющий условиям теоремы, встречается в квантовой теории полей (см., например, Фридрихс, Математические вопросы квантовой теории полей, РЖМат, 1955, 2311); в доказательстве используются рассуждения эвристического характера, имеющиеся в этой книге Фридрихса. Автор на примере показывает, что заключение теоремы перестает быть справедливым, если отбросить условие (2) и сохранить лишь условие (1). M. A. Наймарк

5948. **Замыкание множества регулярных элементов кольца операторов. Фелдман, Кейдисон** (The closure of the regular operators in a ring of operators. Feldman Jacob, Kadison Richard V.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 909—916 (англ.)

Пусть R — кольцо операторов, действующих в гильбертовом пространстве H. Подпространство $E_1 \subset H$ называется эквивалентным относительно R подпространству $E_2 \subset H$, если в R существует оператор, отображающий E_1 изометрично на E_2 и аннулирующий ортогональное дополнение к E_1. Для любого оператора A вводятся обозначения: $n(A)$ — совокупность векторов x, для которых $Ax = 0$, $r(A)$ — замыкание области значений оператора A.

Доказаны следующие теоремы:

1) Для того чтобы оператор A принадлежал замыканию (в смысле нормы оператора) множества регулярных элементов кольца R, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало подпространство E, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $P_E \in R$, где P_E — оператор проектирования на E,

б) $E \supseteq n(A)$,

в) $\| AP_E \| < \varepsilon$,

г) E эквивалентно относительно R подпространству $H \ominus r\,[A(I - P_E)]$.

2) Пусть R — кольцо всех ограниченных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H, G — множество регулярных элементов кольца R. Для того чтобы оператор A не принадлежал замыканию $\overline{G}$ множества G, необходимо и достаточно, чтобы размерности подпространства $n(A)$ и $H \ominus r(A)$ были различны и чтобы существовала постоянная k, для которой $\|Ax\| > k$ при любом $x \in H \ominus n(A)$, $\|x\| = 1$.

3) Для того чтобы оператор A не принадлежал замыканию $\overline{G}$, необходимо и достаточно, чтобы $A = UB$, где $B \in G$, а U изометрически отображает подпространство $H \ominus n(U)$ на некоторое подпространство E, у которого размерность ортогонального дополнения $H \ominus E$ отлична от размерности подпространства $n(U)$.

Далее рассмотрены некоторые обобщения теоремы 3) в предположении, что G — множество регулярных элементов кольца операторов R, центр которого состоит из операторов вида λI. М. С. Бродский

5949. Об одном обобщении метода Канторовича решения функциональных уравнений. Харазов Д. Ф., Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1954, **20**, 279—296

Автор распространяет общую теорию приближенных методов (Канторович Л. В., Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 6, 89—185) на уравнения с оператором, аналитически зависящим от параметра, именно, на уравнения вида

$$x - \lambda H_\lambda x = y, \qquad (1)$$

где H_λ — линейный оператор, переводящий пространство X типа (B) в себя и $H_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k H_k$, причем ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \|H_k\|$ сходится в круге $|\lambda| < \rho$.

Уравнение (1) заменяется «приближенным» уравнением

$$x^{(n)} - \lambda H_\lambda^{(n)} x^{(n)} = y^{(n)}, \qquad (2)$$

рассматриваемым в пространстве $\overline{X}_n$, $H_\lambda^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k H_k^{(n)}$. На операторы H_k и $H_k^{(n)}$ накладываются требования, обеспечивающие соблюдение условий, наложенных на операторы «точного» и «приближенного» уравнений в статье Л. В. Канторовича, по отношению к операторам H_λ и $H_\lambda^{(n)}$. Благодаря этому все теоремы общей теории переносятся на уравнения рассматриваемого вида. (Автор отмечает, что многие его теоремы доказываются аналогично теоремам Л. В. Канторовича — фактически здесь достаточно применения результатов этих теорем — *Pefi*).

Даны приложения к исследованию сходимости в среднем метода Галеркина и метода вырожденных ядер для интегральных уравнений с ядром, аналитически зависящим от параметра, а также к методу редукции для бесконечных систем линейных уравнений. За исключением метода вырожденных ядер, получены результаты, аналогичные полученным в цитированной выше статье Л. В. Канторовича.

В статье допущен ряд опечаток. В частности, в формуле (21) вместо y следует читать $\|y\|$. В формуле (27) и в предыдущей формуле пределы суммирования должны быть: по k от 0 до ∞, по j от 1 до n.

И. К. Даугавет

5950. Пространство Лебега. Пример регулярного пространства Рисса. Гомиш (Espaço de Lebesgue. Um exemplo de espaço de Riesz regular. Gomes Ruy Luís), Gaz. mat., 1953, **14**, № 56, 5—6 (португ.)

Векторное пространство F всех ограниченных вещественных функций на замкнутом интервале $[a, b]$, упорядоченное естественным образом, является пространством Рисса. В F вводится «лебегова топология», в которой полную систему окрестностей образуют «интервалы» $[h, g]$, где h непрерывны сверху, а g — снизу. В этой топологии F оказывается регулярным хаусдорфовым пространством, которое автор и называет пространством Лебега. Непрерывные функции плотны в F. Интеграл Лебега можно определить как результат непрерывного продолжения интеграла Коши с непрерывных функций на все пространство Лебега F.

Д. А. Райков

5951. О некоторых упорядоченных множествах проекторов в гильбертовом пространстве (продолжение и окончание). Сойсал (Sur certains ensembles ordonnés de projecteurs dans l'espace de Hilbert (suite et fin). Soysal Selma), Istanbul Üniv. fen. fak. mec., 1953, **18**, № 4, 323—351 (франц.)

В работе продолжается изучение абстрактного интеграла

$$\int_\varphi \varphi(P)\, dPf$$

где P — упорядоченное семейство проекторов в сепарабельном гильбертовом пространстве, а f — элемент этого пространства (РЖМат, 1955, 3301). Устанавливаемые свойства аналогичны свойствам обычного операторного интеграла, когда семейство P определяется вещественным параметром и является разложением единицы.

Есть основания считать, что при предположениях, сделанных автором относительно P, оно является разложением единицы. Однако этот вопрос в работе не затрагивается. Г. П. Акилов

5952. Об одном понятии сходимости. Кристеску (Asupra unei noţiuni de convergenţă. Cristescu Romulus), Bul. stiinţ. Acad. R P. Romîne, Sec. mat. şi. fiz., 1954, **6**, № 2, 297—304 (рум.; резюме русс., франц.)

Обобщая рассматривавшееся референтом понятие линейного пространства с нормой, определенной для конечных комплексов элементов (Vulich B., Ann. Math., 1937, **38**, 156—174), автор вводит пространства, в которых вместо одной нормы задано направленное множество псевдонорм комплекса (*VP*-пространства). Посредством этих псевдонорм в *VP*-пространствах определяется сходимость; рассматриваются линейные операции. В качестве примера приводится пространство M почти всюду ограниченных, измеримых, вещественных функций на отрезке. При некотором определении псевдонорм в M сходимость последовательности функций в смысле введенной обобщенной метрики совпадает со сходимостью почти всюду при условии, что функции в совокупности ограничены. Б. З. Вулих

5953. Почти периодические функции и эргодическая теорема. Мак (Fastperiodische Funktionen und Ergodensatz. Maak Wilhelm), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 137 (нем.)

Если в гильбертовом пространстве H действует группа унитарных операторов x, то функции xf «асимптотически почти периодичны» по x и для них существует интегральное среднее. Отсюда следует эргодическая теорема Биркгофа и некоторые другие факты.

С. В. Фомин

5954. Об эргодической теореме. Цуруми (On the ergodic theorem. Tsurumi Shigeru), Tôhoku Math. J., 1954, **6**, ser. 2, № 1, 53—68 (англ.)

Подробное изложение результатов, опубликованных ранее. См. РЖМат, 1955, 5164. М. И. Грабарь

5955. Опечатки (Errata). Tôhoku Math. J., 1954, **6**, № 2, 3 (англ.)

Опечатки к статье Цуруми (реф. 5954)

5956. **Свойства импульсной функции Дирака и ее применения. Лафлер** (Propriétés de la fonction impulsive de Dirac et applications. Lafleur Ch.), Revue HF, 1954, **2**, № 11, 289—295 (франц.)

Стандартное «физическое» изложение основных формул, связанных с дельта-функцией («функция, равная нулю при $x \neq 0$ и бесконечности при $x = 0$ и обладающая интегралом, равным 1»). Утверждается без всяких пояснений, будто теория распределений Шварца обеспечивает справедливость всех формально проводимых выкладок. Г. Е. Шилов

5957. **Функция Дирака. Боду** (La fonction de Dirac. Baudoux P.), Revue HF, 1954, **2**, № 11, 281—282 (франц.)

Популярная заметка о дельта-функции, сопровождающая, как видно из текста, более специальную статью Лафлёра (реф. 5956). Г. Е. Шилов

5958. **Интеграл для распределений. Беркилл** (An integral for distributions. Burkill John Charles), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 90 (англ.)

Указывается, что теория распределений Шварца по сути есть теория интегралов Хеллингера (см., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, 1947, §§ 85—86) типа

$$(T, f) = \int f \frac{d^n g}{dx^{n-1}}$$

с некоторыми вообще недифференцируемыми функциями $g(x)$. Г. Е. Шилов

5959. **Теория возмущения для одномерного волнового уравнения. Прайс** (Perturbation theory for the one-dimensional wave equation. Price P. J.), Proc. Phys. Soc., 1954, **A67**, № 4, 383—385 (англ.)
См. РЖФиз, 1954, 12474.

5960. **Ковариантные интегральные уравнения для операторов в гейзенберговском представлении. Иден** (Covariant integral equations for Heisenberg operators. Eden R. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, № 4, 592—603 (англ.)
См. РЖФиз, 1955, 18323.

5961 Д. **Некоторые новые вопросы общей теории линейных операторов в банаховых пространствах. Гохберг И. Ц.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1955

5962 Д. **Об определении асимптотики функции $q(x)$ по свойствам спектральной функции оператора — $y'' + q(x)y$. Нейгауз М. Г.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1955

5963 Д. **О спектрах операторов, близких к линейным. Поволоцкий А. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1955

См. также: 5535 К, 5629, 5702, 5715, 5730 К, 5804, 5805, 5807, 5808, 5821 К, 5824 Д, 5864, 5866, 5878, 6094

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5964. **Стационарные последовательности в гильбертовых пространствах. Колмогоров** (Stationary sequences in Hilbert spaces. Kolmogoroff A. N.), Trabajos Estadistica, 1953, **4**, 55—73; 243—270 (исп.)

Перевод статьи А. Н. Колмогорова «Стационарные последовательности в гильбертовых пространствах» (Бюл. Моск. Гос. ун-та, Математика, 1941, **2**, № 6, 40 стр.).

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 449

5965. **Когда теория вероятностей стала наукой. Бух** (Da sandsynlighedsregning blev videnskab. Buch Kai Rander), Nord. mat. tidskr., 1955, **3**, № 1—2, 19—26 (дат.)

5966. **Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Гнеденко, Колмогоров** (Перев. с русс.) (Limit distributions for sums of independent random variables. Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N. (tr. from the Russian), Addison-Wesley, 1954, 264 p., 7.50 doll.), Cumul. Book Index, 1954, **57**, № 8, 50 (библ.)

5967. **Об асимптотическом разложении Крамера из теории вероятностей. Ленц** (Über die Cramérschen asymptotischen Entwicklungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Lenz Hanfried), Math. Ann., 1953, **125**, № 3, 307—313 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и дисперсиями, соответственно равными $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$. Пусть далее $\sigma^2 = \Sigma_1^n \sigma_\nu^2$. Известно, что при соблюдении некоторых общих условий для функции распределения $F(x)$ случайной величины $x = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/\sigma$ справедливо асимптотическое разложение по степеням $1/\sqrt{n}$ (см., например, Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, Изд-во ин. лит., М., 1948).

Используя известную теорему сложения для полиномов Чебышева — Эрмита, автор получает асимптотическое разложение для характеристической функции случайной величины x, из которого известными приемами выводится упомянутое асимптотическое разложение. С. Х. Сираждинов.

5968. **Экстремальные значения условного распределения вероятностей для цепи Маркова. Хитмайр** (Valeur extrémale des distributions de probabilités conditionnelles dans une chaîne de Markoff. Hittmair Otto), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 14, 1469—1470 (франц.)

Пусть $x(t)$ — марковский процесс; тогда плотность условного распределения вероятностей для значения $x(t+\tau)$ при заданном значении $x(t)$ в момент t удовлетворяет соотношению

$$f[x(t+\tau) \mid x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{p+1} \mid x_p) f(x_p \mid x_{p-1}) \cdots \times \\ \times f(x_1 \mid x_0)\, dx_p \cdots dx_1, \qquad (1)$$

где $x_{p+1} = x(t_{p+1}) = x(t+\tau)$ и $x_0 = x(t_0) = x(t)$, а точки $t_p, t_{p-1}, \ldots, t_1$ делят интервал $[t+\tau, t]$ на p равных частей. Обозначим $\varphi(x_i) = f(x_{i+1} \mid x_i) f(x_i \mid x_{i-1})$ и $m_i = \int_{-\infty}^{\infty} x_i \varphi(x_i)\, dx_i$. Отмечается, что если отношение $f(x_{i+1} \mid x_{i-1})/\varphi(m_i) = c_p$ постоянно (не зависит от значений x_{i+1} и x_{i-1}), то (1) можно переписать в виде $f(x_{p+1} \mid x_0) = c_p f(x_{p+1} \mid m_p) f(m_p \mid m_{p-1}) \cdots f(m_1 \mid x_0)$; если к тому же еще $\left.\frac{d\varphi(x_i)}{dx_i}\right|_{x_i = m_i} = 0$, то

$$f(x_{p+1} \mid x_0) = c_p \max_{x_1, \ldots, x_p} f(x_{p+1} \mid x_p) \cdots f(x_1 \mid x_0).$$

частности, так будет обстоять дело, если распределение с плотностью $f(x_{i+1} \mid x_i)$ есть распределение Гусса. А. М. Яглом

5969. Экстремальный принцип цепей Маркова в броуновском движении. Хитмайр (Principe extrémal d'une chaîne de Markoff dans le mouvement Brownien. Hittmair Otto), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 15, 1555—1557 (франц.)

Предложенный автором экстремальный принцип для цепей Маркова (см. реф. 5968) применяется для вывода формул теории броуновского движения.

И. И. Гихман

5970. Коллекционирование талонов, встречающихся с неравными вероятностями. Шеллинг (Coupon collecting for unequal probabilities. Schelling Hermann von), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 5, 306—311 (англ.)

Рассматривается обобщение задачи о коллекционере (Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, задача 3, г; М., Изд-во ин. лит., 1952, стр. 177) случай, когда коллекционируемые талоны встречаются неодинаково часто.

5971. О строгой непрерывности стохастических процессов. Лукач (On strongly continuous stochastic processes. Lukacs Eugene), Sankhyā, 1954, 13, part 3, 219—228 (англ.)

Для изучения процессов гауссова типа используется следующее определение строгой непрерывности (см., например, Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, 1949, стр. 136): случайный процесс $x(t)$ называется строго непрерывным в замкнутом интервале $[a, b]$, если для каждых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, \eta)$ такое, что для любого конечного множества S точек $[a, b]$

$$P\{\sup_{i,k} |y(t_i) - y(t_k)| \leqslant \varepsilon;\ |t_i - t_k| < \delta,\ t_i, t_k \in S\} \geqslant 1 - \eta.$$

Доказывается теорема (Levy P., Processus stochastiques et mouvement Brownien, Paris, 1948, théorème 8.3): если случайный процесс с независимыми приращениями строго непрерывен в интервале $[a, b]$, то $y(b) - y(a)$ имеет нормальное распределение.

В. С. Королюк

5972. Распределения и статистические моменты бозонов и фермионов и некоторые их приложения. Лопушанский (Distributions and statistical moments of bosons and fermions with some of their applications. Łopuszański J.), Acta phys. polon., 1953, 11, № 3—4, 298—313 (англ.)

Рассматривается применение метода производящих функций к решению возникающих в квантовой физике комбинаторных задач. N частиц распределяются по L ячейкам. Все различимые распределения частиц считаются равновероятными. Допускаются частицы трех типов: 1) различимые и могущие заполнять ячейки любым образом (статистика Максвелла — Больцмана), 2) неразличимые и могущие заполнять ячейки любым образом (статистика Бозе — Эйнштейна), 3) неразличимые и обязанные находиться все в разных ячейках (статистика Ферми — Дирака). Рассматриваются следующие две задачи:

А. Будем говорить, что ячейка обладает свойством S, если число находящихся в ней частиц принадлежит данному числовому множеству R. Какова вероятность $p(m; N, L, R)$ того, что число ячеек, обладающих свойством S, будет равно m?

Б. Пусть $L = Kk$, K и k — целые. Какова вероятность $q(n; N, K, k)$ того, что число частиц, попавших в фиксированную группу из k ячеек, будет равно n?

Некоторые из результатов автора ранее получены Домбом (Domb C., Proc. Phys. Soc. 1952, A65, 305).

А. А. Юшкевич

5973. О тензорных средних и их применении. Мачинский (Sur les moyennes-tenseurs et sur leur application. Matschinski Matthias), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 22, 1457—1459 (франц.)

5974. К статье «Якобианы некоторых матричных преобразований, используемых в многомерном анализе». Олкин (Note on «The Jacobians of certain matrix transformations useful in multivariate analysis». Olkin Ingram), Biometrika, 1953, 40, № 1,2, 43—46 (англ.)

Дополнения к статье Димера, Олкина (Deemer W. L., Olkin I., Biometrika, 1951, 38, 345).

5975 Д. О существовании и единственности предельных распределений для систем стохастических дифференциальных уравнений. Блюменфельд В. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. ун-т, Л., 1955

5976 Д. Локальные предельные теоремы для некоторых схем циклических процессов. Шарагина З. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Моск. гор. пед. ин-т, М., 1954

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

5977. Доверительная область для математического ожидания двумерной случайной величины. Им (Ein Konfidenzbereich für den Erwartungswert eines Mittelwertepaares. Ihm Peter), Z. indukt. Abstammungs- und Vererbungslehre, 1954, 86, № 1, 54—60 (нем.)

Излагается известный метод построения доверительной области для математического ожидания двумерной нормальной случайной величины по нескольким независимым наблюдениям. Используется обобщение стьюдентовского отношения на двумерный случай (Hotelling H., Ann. Math. Statistics, 1931, 2, 359—378).

Л. Н. Большев

5978. Применение обобщенного t-критерия Хотеллинга для проверки различия математических ожиданий пары двумерных случайных величин. Им (Anwendung von Hotellings verallgemeinertem t-Test zur Prüfung der Differenz zweier Mittelwertepaare. Ihm Peter), Z. indukt. Abstammungs- und Vererbungslehre, 1954, 86, № 1, 143—156 (нем.)

Пусть (ξ_1, ξ_2) и (η_1, η_2) — нормальные двумерные случайные величины. Рассматриваются две альтернативные гипотезы H_0 $(M\xi_1, M\xi_2) = (M\eta_1, M\eta_2)$ и H_1 $(M\xi_1, M\xi_2) \neq (M\eta_1, M\eta_2)$ и излагается известный метод проверки таких гипотез по нескольким независимым наблюдениям двумерных случайных величин ξ и η.

Л. Н. Большев

5979. Таблицы для непараметрического критерия смещения. Розенбаум (Tables for a nonparametric test of location. Rosenbaum S.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 1, 146—150 (англ.)

Пусть s — число значений в случайной выборке размера m из непрерывной совокупности π, больших (меньших) наибольшего (наименьшего) значения в другой выборке размера n из той же совокупности.

Приведены таблицы 1%-ного и 5%-ного критического уровня величины s при значениях m и n от 1 до 50 с шагом 1, составленные с использованием точного распределения величины s (Wilks S. S., Ann. Math. Statistics, 1942, 13, 400—409). Е. Л. Ющенко

5980. «Средние доверительные» пределы для биномиальных вероятностей. Хамакер («Average confidence» limits for binomial probabilities. Hama-

ker H. C.), Rev. Inst. Internat. Statistique, 1953, 21, 17—27 (англ.)

Пусть X — случайная величина с двумя возможными значениями 0 и 1, вероятности которых $1-p$ и p соответственно. Пусть k обозначает сумму n независимых наблюдений X. Зададим некоторое число β $(0<\beta<1)$. Пусть $p_1(n,k)$ и $p_2(n,k)$ — две функции от k, удовлетворяющие неравенству $p_1(n,k)<p_2(n,k)$ для всех k, такие, что $P_p[p_1(n,k)<p<p_2(n,k)]\geqslant\beta$ для всех p, причем точное равенство достигается по меньшей мере для одного p. Автор замечает, что тогда

$$\int_0^1 P_p[p_1(n,k)<p<p_2(n,k)]\,dp>\beta,$$

и приходит к мысли заменить доверительный интервал $[p_1(n,k),\ p_2(n,k)]$ более коротким интервалом $[p_1'(n,k),\ p_2'(n,k)]$, где функции $p_1'(n,k)$ и $p_2'(n,k)$ построены так, что интеграл

$$\int_0^1 P_p[p_1'(n,k)<p<p_2'(n,k)]\,dp$$

приближенно равен β. Аналогичные построения сделаны как для случая одностороннего верхнего, так и для случая одностороннего нижнего доверительных пределов. Даются таблицы для таких пределов при различных значениях n и β. L. Weiss

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 331.

5981. **Обобщение метода m ранжировок. Бенард, Элтери** (A generalization of the method of m rankings. Benard A., Elteren Ph. van), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch, 1953, A56, № 4, 358—369; Indagationes math., 1953, 15, № 4, 358—369 (англ.)

Для проверки гипотезы H_0, что наблюденные m ранжировок P_μ $(\mu=1,\ldots,m)$ одного и того же множества объектов $O_1, O_2, \ldots, O_n$ представляют случайную выборку (с повторениями) из множества всех перестановок этих объектов, Фридманом (Friedman M., Amer. Statist. Assoc., 1937, 32, 675—699) был предложен критерий $S=\sum_{\nu=1}^n\{s_\nu-m(n+1)/2\}^2$, где $s_\nu=\sum_{\mu=1}^m r_{\mu\nu}$ — сумма рангов $r_{\mu\nu}$, получаемых объектом O_ν во всех m ранжировках. Если H_0 верна, то для больших значений m критерий S (при надлежащей нормировке) распределен как χ^2 с $(n-1)$ степенями свободы. Рассматривается аналогичная, но значительно более общая схема повторных ранжировок.

Н. В. Смирнов

5982. **О квадратичных оценках компонент дисперсии. Грейбилл** (On quadratic estimates of variance components. Graybill Franklin A.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 2, 367—372 (англ.)

Пусть $Y_{ijk}=\mu+a_i+b_{ij}+e_{ijk}$, $i=1,\ldots,N_1$, $j=1,\ldots,N_2$, $k=1,\ldots,N_3$, где μ — постоянная и a_i, b_{ij}, e_{ijk} — независимые случайные величины со средним 0 и дисперсиями σ_a^2, σ_b^2, σ^2 соответственно, обладающие конечными четвертыми моментами. Наилучшей квадратичной несмещенной оценкой для σ_b^2 называется квадратичная форма Q от наблюденных значений Y_{ijk} такая, что $MQ=\sigma_b^2$ и $DQ\leqslant DQ^*$, где Q^* — любая квадратичная форма от Y_{ijk}. Доказывается, что оценка для σ_b^2, полученная при помощи метода дисперсионного анализа, является наилучшей квадратичной несмещенной оценкой. Аналогичный результат имеет место для оценок σ_a^2 и σ^2, а также для случая, когда Y является суммой любого конечного числа независимых случайных величин. Л. Н. Больш

5983. **Заметка об использовании статистики Шермана для критерия случайности. Бартоломью** (Note on the use of Sherman's statistic as a test for randomness. Bartholomew D. J.), Biometrika, 1954, 41, № 3—4, 556—558 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ — длины интервалов, на которые делится отрезок $[0, 1]$ n точками, независимо и равномерно разбросанными на отрезке. Шерман (Sherman B., Ann. Math. Statistics, 1950, 21, 339) вывел точные выражения для закона распределения и моментов статистики:

$$\overline{\omega}_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\left|x_i-\frac{1}{n+1}\right|.$$

Автор дает приближенное при небольших n выражение для закона распределения $\overline{\omega}_n$ с помощью соответственно подобранного распределения Пирсона 1-го типа.

Б. А. Севастьянов

5984. **Несмещенные оценки отношения. Хартли Росс** (Unbiased ratio estimators. Hartley H. O. Ross A.), Nature, 1954, 174, № 4423, 270—271 (англ.)

Рассматривается задача определения среднего значения $\overline{Y}$ переменной y, если известно среднее значение $\overline{X}$ переменной x, коррелированной с y.

Исследуется случай, когда имеется выборка, состоящая из n пар x_i, y_i и произведенная из совокупности, содержащей N пар. Оценки $\tilde{y}=\overline{X}\overline{y}/\overline{x}$ и $\hat{y}=\overline{X}\overline{r}$, где $\overline{y}$, $\overline{x}$ и $\overline{r}$ означают соответственно среднее арифметическое из величин y_i, x_i и y_i/x_i, обладают смещением. Предлагается несмещенная оценка

$$y'=\overline{X}\overline{r}+n(N-1)(\overline{y}-\overline{r}\overline{x})/(n-1)N.$$

Приводится выражение для главного члена дисперсии y', имеющего порядок $O(n^{-1})$. С. Х. Туманян

5985. **Асимптотическое разложение суммы, встречающейся в проблеме однородности двух выборок. Штребель** (Asymptotische Entwicklung einer Summe, die beim Problem der zwei Stichproben auftritt. Strebel K.), Math. Ann., 1954, 127, № 5, 401—405 (нем.)

Пусть $z=\Psi(w)$ — функция, обратная к нормальной функции распределения $w=\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-x^2/2}dx$.

Для суммы $Q=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Psi^2\left(\frac{k}{n+1}\right)$, которая встречается в проблеме однородности двух выборок (РЖМат, 1954, 3030), указывается следующее асимптотическое разложение:

$$Q=1-\frac{2}{n}\log n+\frac{1}{n}\log(\log n)-\frac{1}{n}\log\frac{\pi}{e}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

В. С. Королюк

5986. **О двухвыборочном критерии Лемана. Сандрум** (On Lehmann's two-sample test. Sundrum R. M.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 1, 139—145 (англ.)

Рассматриваются некоторые свойства критерия Лемана (Lehmann E. L., Ann. Math. Statistics, 1951, 22, 165—179) для проверки совпадения двух непрерывных функций распределения по двум выборкам.

Е. Л. Ющенко

5987. **Оценка параметра распределения Пуассона по усеченной выборке и по цензурированной выборке. Коэн** (Estimation of the Poisson parameter from

truncated samples and from censored samples. Cohen A. C.), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, 49, № 265, 158—168 (англ.)

Рассматривается выборка из генеральной совокупности, имеющей распределение Пуассона. По наблюдениям, попавшим в данный фиксированный интервал $[c,d]$, $0 \leqslant c < d \leqslant \infty$, по методу наибольшего правдоподобия оценивается значение параметра распределения. При этом число наблюдений, попавших вне интервала $[c, d]$, может быть неизвестным — случай усеченной выборки, или известным — случай цензурированной (прошедшей контроль) выборки.

Для всех возможных случаев автор выписывает уравнение правдоподобия и асимптотическое выражение для дисперсии оценки. Методы численного решения уравнения правдоподобия иллюстрируются примерами.

Н. Н. Ченцов, В. П. Швальб

5988. **Популяционные частоты разновидностей и оценка параметров популяции. Гуд** (The population frequencies of species and the estimation of population parameters. Good I. J.), Biometrika, 1953, 40, parts 3, 4, 237—264 (англ.)

5989. **Анализ регрессии временных рядов со стационарными остатками. Гренандер, Розенблатт** (Regression analysis of time series with stationary residuals. Grenander Ulf, Rosenblatt Murray), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 9, 812—816 (англ.)

Рассматривается, вообще говоря, комплексная случайная последовательность $y_t = x_t + m_t$ со средним значением $Ey_t = m_t = \Sigma_{k=1}^{p} c_k \varphi_t^{(k)}$, где $\varphi_t^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, p — заданные функции t, а c_k, $k = 1, 2, \ldots, p$ — неизвестные постоянные, и со стационарным остатком $x_t : E x_t \overline{x_s} = r_{|t-s|}$. Относительно корреляционной функции $r_{|t-s|}$ предполагается, что соответствующая ей спектральная функция абсолютно непрерывна и является неопределенным интегралом от непрерывной и всюду положительной спектральной плотности $f(\lambda)$. Требуется по заданным значениям $y_1, y_2, \ldots, y_N$ (т. е. по конечному отрезку одной реализации последовательности) оценить вектор $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$.

Так как в рассматриваемом случае

$$\mathbf{m} = \Phi \mathbf{c},$$

где $\Phi = \| \varphi_t^{(k)} \|$ — прямоугольная $(N \times p)$-матрица, то оценка $\mathbf{c}$ по методу наименьших квадратов, получаемая при помощи минимизации квадратичной формы $(\mathbf{y} - \Phi\mathbf{c})' (\mathbf{y} - \Phi\mathbf{c})$ (штрих означает эрмитово-сопряженную матрицу), равна

$$\mathbf{c}_L^* = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'\mathbf{y}; \qquad (1)$$

это есть несмещенная оценка, дисперсия которой просто выражается через матрицы Φ и $\mathbf{R} = \| r_{|t-s|} \|$. С другой стороны, зная матрицу вторых моментов $\mathbf{R}$, мы можем построить наилучшую линейную несмещенную оценку $\mathbf{c}$ (т. е. линейную несмещенную оценку наименьшей дисперсии); такой оценкой будет оценка Маркова

$$\mathbf{c}_0^* = (\Phi'\mathbf{R}^{-1}\Phi)^{-1}\Phi'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}. \qquad (2)$$

Учитывая, что оценка по методу наименьших квадратов строится гораздо проще и более широко применима, чем оценка (2) (в последнем случае приходится вычислять R^{-1}, что при большом N весьма сложно, а в первом случае вовсе не надо знать $\mathbf{R}$), представляет интерес сравнение точностей этих двух оценок. С этой целью рассматривается асимптотическое поведение матриц вторых моментов векторов (1) и (2) при $N \to \infty$. При некоторых сравнительно широких условиях, наложенных на асимптотическое поведение функций $\varphi_t^{(k)}$ при $t \to \infty$ (этим условиям удовлетворяют, в частности, многочлены и тригонометрические многочлены, но не удовлетворяют экспоненциально возрастающие функции), указываются главные члены матриц $E(\mathbf{c}_L^* - \mathbf{c})(\mathbf{c}_L^* - \mathbf{c})'$ и $E(\mathbf{c}_0^* - \mathbf{c})(\mathbf{c}_0^* - \mathbf{c})'$ при $N \to \infty$. Приводятся условия, при которых эти главные члены будут совпадать друг с другом; эти условия формулируются с помощью введенного в статье понятия о «спектре регрессии», представляющем собой множество точек роста некоторой специальной неубывающей матричной функции, связанной с функциями $\varphi_t^{(k)}$. В частности, с помощью понятия о «спектре регрессии» удается получить условие того, что главные члены асимптотических выражений для дисперсий оценок Маркова и метода наименьших квадратов для $\mathbf{c}$ будут совпадать при любой непрерывной положительной спектральной плотности $f(\lambda)$; существенно, что это условие оказывается выполняющимся в случае функций $\varphi_t^{(k)}$, являющихся произведениями степеней t на тригонометрические функции $\sin \lambda_k t$ или $\cos \lambda_k t$.

Отмечается, что некоторое число примеров, рассчитанных авторами численно, оставляют впечатление, что асимптотические результаты, содержащиеся в настоящей статье, будут, как правило, справедливы уже при сравнительно небольшом N.

Доказательства основных результатов в работе отсутствуют; указывается, что эти доказательства и обсуждение результатов включены в подготовленную авторами книгу по статистике стационарных случайных процессов.

А. М. Яглом

5990. **Проблема автокорреляции в анализе регрессии. Андерсон** (The problem of autocorrelation in regression analysis. Anderson R. L.), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, 49, № 265, 113—129 (англ.)

Обзор литературы. Библ. 65 назв.

5991. **Оценка биологических популяций. Чепман** (The estimation of biological populations. Chapman Douglas G.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 1, 1—15 (англ.)

Дано несколько схем, дающих возможность получить оценки максимального правдоподобия для величины биологической популяции, а также других параметров популяции. Даны дисперсии этих оценок. Схемы основаны на последовательном отлове части особей, причем часть отловленных особей отмечается каким-либо способом и выпускается обратно. Библ. 28 назв.

Б. А. Севастьянов

5992. **Монотонность отношения двух нецентральных t распределений. Краскал** (The monotonicity of the ratio of two noncentral t density functions. Kruskal William), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 1, 162—165 (англ.)

Рассматривается функция плотности $\varphi(x; \nu, \delta)$ нецентрального t распределения с ν степенями свободы $(t = (u + \delta)/\sqrt{w/\nu}$, где u и w — независимые случайные величины с нормальным и χ_ν^2 распределениями соответственно; δ — параметр смещения).

Доказывается теорема:

Если $\delta_0 \neq \delta_1$, то $\ln \dfrac{\varphi(x; \nu, \delta_1)}{\varphi(x; \nu, \delta_0)}$ — строго монотонная функция, возрастающая при $\delta_0 < \delta_1$, убывающая при $\delta_0 > \delta_1$.

Е. Л. Ющенко

5993. **Аппроксимационные методы, которые сходятся с вероятностью единица. Блум** (Approximation methods which converge with probability one. Blum

Julius R.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 2, 382—386 (англ.)

Продолжаются исследования, начатые ранее (Robbins H., Monro S., Ann. Math. Statistics, 1951, 22, 400—407). Показано, что при некоторых ограничениях с вероятностью единица $x_n \to \theta$ $(n \to \infty)$ (см. обозначения РЖМат, 1954, 3406). Л. Н. Большев

5994. **Заметка о стохастическом аппроксимационном методе Роббинса-Монро. Каллианпур** (A note on the Robbins-Monro stochastic approximation method. Kallianpur Gopinath), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 2, 386—388 (англ.)

Работа примыкает к статье Блума (реф. 5993). Л. Н. Большев

5995. **Использование в преподавании статистики экспериментов с аппаратом, производящим случайный выбор. Ноулс** (Experiments with a random selector as an aid to the teaching of statistics. Knowles Elsie A. G.), Appl. Statist., 1954, 3, № 2, 90—103 (англ.)

Аппарат состоит из круга, разделенного на 15 одинаковых секторов, и стрелки, которая может вращаться вокруг центра круга. Описываются статистические эксперименты с этим аппаратом, которые могут быть полезны при изучении студентами статистики.

Б. А. Севастьянов

5996. **Несколько применений номограммы в статистике. Бродбент** (Some uses of the nomogram in statistics. Broadbent Simon), Appl. Statist., 1954, 3, № 1, 33—43 (англ.)

Предлагаются простые номограммы из выравненных точек, позволяющие вычислять коэффициент вариации, строить доверительные интервалы для среднего по выборке из нормальной совокупности, проверять по выборочным данным гипотезы о тождественности дисперсий или средних в двух нормальных совокупностях.

Л. Н. Большев

5997. **Угловое преобразование для серийного коэффициента корреляции. Дженкинс** (An angular transformation for the serial correlation coefficient. Jenkins G. M.), Biometrika, 1954, 41, № 1, 2, 261—265 (англ.)

Если $x_1, \ldots, x_n$ — выборка из нормально распределенной совокупности и

$$r = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

то величина $y = \arcsin r$ распределена асимптотически нормально. Вычислены первые четыре момента распределения величины y. Полученные результаты применены к задаче проверки простой гипотезы для коэффициента ρ в соотношении $x_t = \rho x_{t-1} + \delta_t$, где δ_t — случайная величина, распределенная нормально $(0, \sigma)$.

В. В. Петров

5998. **Об оценке параметров нормальной совокупности по односторонне и двусторонне усеченным выборкам с помощью метода моментов. Дес Радж** (On moment estimation of the parameters of a normal population from singly and doubly truncated samples. Des Raj), Ganita, 1953, 4, 79—84 (англ.)

Пусть X имеет нормальное распределение (μ, σ^2) с неизвестными μ и σ^2 и пусть $X_0' < X_0''$ — два известных числа. Рассматриваются следующие случаи: а) X усечено границами (X_0', X_0''), т. е. для получения выборки объема n производится ряд измерений значений X, пока не будет получено n значений, лежащих в интервале (X_0', X_0''), причем значения, оказывающиеся вне этого интервала, отбрасываются; б) X изучается в каждой области по отдельности: из выборки полного объема n регистрируются значения, попадающие в интервал (X_0', X_0''), и их частота n_0; для значений меньших X_0' и больших X_0'' регистрируются только их частоты n_1 и n_2 $(n_1 + n_0 + n_2 = n)$; в) X изучается в обеих областях вне данного интервала совместно: регистрируются значения, попадающие в интервал (X_0', X_0'') и их частота n_0, в то время как для значений вне (X_0', X_0'') регистрируется только их полная частота $n - n_0$. В каждом из этих случаев автор показывает, что получаемые с помощью метода моментов (с очевидными видоизменениями для случаев б) и в)) оценки параметров μ и σ^2 совпадают с оценками максимального правдоподобия, полученными Коэном (Cohen, Ann. Math. Statistics, 1950, 21, 557—569) и Хальдом (Hald, Skand. aktuarietidskr., 1949, 32, 119—134). Это является обобщением результата, полученного Фишером для случая одностороннего усечения (Fischer R. A., Circular and hyperbolic functions..., Britisch Association for the Advancement of Science, Mathematical Tables, vol.1, Cambridge, 1931, p XXVI—XXXV). Z. W. Birnbaum

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 241

5999. **Смещения в оценке порядковой корреляции. Поп, Марриотт** (Errors in the estimation of serial correlations. Pope J. A., Marriott F. H. C.), Nature, 1953, 172, № 4382, 778 (англ.)

6000. **Расчет ошибок при неоднородных измерениях. Столов А. Л., Фишман И. С.**, Уч. зап. Казанск.ун-та, 1953, 113, № 9, 145—153

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ — взаимно независимые, одинаково распределенные случайные величины, имеющие нормальное распределение с неизвестными параметрами (a, σ). Положим $\xi_i = x_{2i-1} - x_{2i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Случайные величины ξ_i также взаимно независимы и подчиняются нормальному закону с параметрами $(0, \sqrt{2}\sigma)$. Это позволяет авторам ввести следующую несмещенную оценку для дисперсии σ^2:

$$m^{*2} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sim \sigma^2.$$

Эта оценка проще обычной оценки

$$m^2 = \frac{1}{2n-1} \sum_{i=1}^{2n} (x_i - \bar{x})^2 \sim \sigma^2,$$

так как не требует вычисления среднего $\bar{x}$ и содержит в два раза меньше возведений в квадрат. В заключение излагаются некоторые применения оценки m^* при обработке результатов наблюдений.

Примечание референта. Рекомендуемая авторами оценка m^{*2} имеет меньшую точность, чем m^2, так как в данном случае $Dm^{*2} = 2\sigma^4/n$, а $Dm^2 = 2\sigma^4/(2n-1)$. Работа написана небрежно, непонятен смысл некоторых утверждений авторов. Л. Н. Большев

ТЕОРИЯ ИГР

6001. **О неймановой теории игр. Мизес** (Über die J. von Neumannsche Theorie der Spiele. Mises Richard von), Math. Nachr., 1953, 9, № 6, 363—378 (нем.)

Определение игры: дана вещественная матрица $\| a_{\mu\nu} \|_{\substack{\mu=1,2,\ldots,m \\ \nu=1,2,\ldots,n}}$; партнер A выбирает последовательность строк $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varkappa, \ldots$, партнер B — последовательность столбцов $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa, \ldots$, причем A

интересован в увеличении величины $G = \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{x=1}^{N} \alpha_{\mu_x \nu_x}$, B — в уменьшении этой ве-

ичины.

Формулируются предположения, лежащие в основе ейлановой теории. 1. Существует частота выбора μ-й роки: $\lim_{N\to\infty} N_\mu / N = x_\mu$ ($\mu = 1,2,\ldots, m$; N_μ — коли-ество номеров, равных μ, в множестве $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$). Существует частота выбора ν-го столбца: $\lim_{N\to\infty} N'_\nu / N = y_\nu$ ($\nu = 1,2,\ldots, n$; N'_ν — количество но-еров, равных ν, в множестве $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N\}$). 3. Пос-едняя частота сохраняется для подпоследовательностей, пределяемых определенным выбором первого игрока, $\lim_{N\to\infty} N_{\nu\mu} / N_\mu = y_\nu$ ($\mu = 1,\ldots, m$; $\nu = 1,\ldots, n$; $N'_{\nu\mu}$ — оличество пар, равных ($\mu\nu$), в множестве $\{(\mu_1\nu_1), (\mu_2\nu_2), \ldots, (\mu_N\nu_N)\}$). После этого исследование игры водится к экстремальной задаче. Для данной билинейной формы $G(x, y) = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$ определить начения $M = \max_x \min_y G(x, y)$, $M' = \min_y \max_x G(x, y)$ при условиях $x_\mu \geqslant 0$ ($\mu = 1,\ldots, m$), $\Sigma x_\mu = 1$, $y_\nu \geqslant 0$ ($\nu = 1, \ldots, n$), $\Sigma y_\nu = 1$ и найти векторы (оптимальные стратегии) x^0, y^0, на которых эти значения достигаются.

Квадратную матрицу $\| a_{\mu\nu} \|_{\substack{\mu=1,\ldots,r \\ \nu=1,\ldots,r}}$ автор называет матрицей нормального типа, если не все построчные и постолбцовые суммы алгебраических дополнений ($Z_\mu = \sum_\nu A_{\mu\nu}$, $S_\nu = \sum_\mu A_{\mu\nu}$) равны нулю и неравные нулю имеют одинаковые знаки. Если из матрицы $\| a_{\mu\nu} \|_{\substack{\mu=1,\ldots,m \\ \nu=1,\ldots,n}}$ выделена квадратная подматрица $\| a^*_{\mu\nu} \|_{\substack{\mu=\alpha_1,\ldots,\alpha_r \\ \nu=\beta_1,\ldots,\beta_r}}$, то для $\rho \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\sigma \neq \beta_1, \ldots, \beta_r$ определяются величины

$$P_\rho = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\beta_1} \ldots a_{\alpha_1\beta_r} & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{\alpha_r\beta_1} \ldots a_{\alpha_r\beta_r} & 1 \\ a_{\rho\beta_1} \ldots a_{\rho\beta_r} & 1 \end{vmatrix}, \quad Q_\sigma = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\beta_1} \ldots a_{\alpha_1\beta_r} & a_{\alpha_1\sigma} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{\alpha_r\beta_1} \ldots a_{\alpha_r\beta_r} & a_{\alpha_r\sigma} \\ 1 \ldots 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Результаты работы заключены в предложении: Каждая вещественная матрица $\| a_{\mu\nu} \|_{\substack{\mu=1,\ldots,m \\ \nu=1,\ldots,n}}$ содержит по крайней мере одну квадратную подматрицу нормального типа $\| a^*_{\mu\nu} \|_{\substack{\mu=\alpha_1,\ldots,\alpha_r \\ \nu=\beta_1,\ldots,\beta_r}}$, для которой $P_\rho / U^* \geqslant 0$ при $\rho \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $Q_\sigma / U^* \leqslant 0$ при $\sigma \neq \beta_1, \ldots, \beta_r$ (U^* — сумма всех алгебраических дополнений матрицы $\| a^*_{\mu\nu} \|$). С помощью этой подматрицы могут быть вычислены величины M, M' и векторы (оптимальные стратегии) x^0, y^0:

$$M = M' = A^* / U^*, \quad (A^* = |\, a^*_{\mu\nu}\,|) \qquad x^0_\mu = \begin{cases} Z^*_\mu / U^*, & \mu = \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \\ 0, & \mu \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_r; \end{cases}$$

$$y^0_\nu = \begin{cases} S^*_\nu / U^*, & \nu = \beta_1, \ldots, \beta_r, \\ 0, & \nu \neq \beta_1, \ldots, \beta_r. \end{cases}$$

При этом любая из оптимальных стратегий x^0, y^0 является линейной комбинацией оптимальных стратегий, вычисленных указанным способом.

Примечание референта. К рассматриваемой экстремальной задаче приводит также исследование вопросов рационального раскроя. В работах: Канторович Л. В., Залгаллер В. А., Расчет рационального раскроя промышленных материалов, 1951; Канторович Л. В., Математические методы в организации и планировании производства, Изд-во Ленингр. ун-та, 1939, — дан другой метод решения этой задачи. Г. Ш. Рубинштейн

6002. **По поводу одной сноски в книге Вальда «Статистические разрешающие функции».** Янг (A footnote to «Statistical decision functions». Young Gail S., Jr), Michigan Math. J., 1952/1953, **1**, № 2, 186—188 (англ.)

Речь идет о сноске в книге Вальда (Wald A., New York, Wiley Publications in Statistics, 1950).

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

6003. **Прохождение некоторых случайных функций через линейные системы.** Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И., Автоматика и телемеханика, 1953, **14**, № 2, 144—163

Рассматриваются линейные системы, в которых входной и выходной сигналы связаны интегрально посредством ядра (передаточная функция системы), зависящего от времени и параметра.

Определяются обобщенные корреляционные функции как коэффициенты разложений характеристических функций n-мерных распределений вероятностей и устанавливаются соотношения, связывающие выходные корреляционные функции с входными. Для случая стационарных выходных сигналов рассматриваются характеристики близости некоторых функций плотности вероятности (быстро затухающих и обладающих одним пиком) к плотности распределения Гаусса. Другие результаты, касающиеся прохождения случайных сигналов через линейные системы, см., например, в работах А. Н. Колмогорова (Юбилейный сб. АН СССР, М., 1947), где полностью разобран случай стационарных возмущений и постоянной передаточной функции системы, и В. С. Пугачева (РЖМат, 1954, 2644). И. И. Э.

6004. **Теория информации. Сообщение в комиссии VIa Международного научного радиосоюза** (Commission VIa. Sous-commission VIa. Theorie de l'information), Bull. infrom. Union radio scient. internat., 1953, № 78, 15—16 (франц.)

См. РЖФиз, 1954, 10491.

6005. **Теория информации.** Фелдман (Information theory. Feldman C. B.), Bell. Labs Rec., 1953, **31**, № 9, 326—332 (англ.)

См. РЖФиз, 1954, 10489.

6006. **Идеальное кодирование и избыточность.** Белл («Ideal coding» versus «redundancy». Bell D. A.), Wireless Engr, 1953, **30**, № 3, 73—74 (англ.)

См. РЖФиз, 1954, 11814.

6007. **Задачи, связанные с сигналами и шумами.** Кац (Signal and noise problems. Kac M.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 7, part 2, 23—26 (англ.)

Перечисляются следующие прикладные вопросы, возникающие при исследовании «шумов» и представляющие, по мнению автора, значительный чисто математический интерес: 1) вопрос об обнаружении сигнала на фоне шумов, тесно связанный с важными вопросами статистики случайных процессов, до сих пор еще не разобранными до конца: 2) вопрос о связи свойств спектра стационарного случайного процесса со свойствами его корреляционной функции, являющийся, фактически, интересным вопросом «чистого» анализа; 3) вопрос об

исследовании прохождения гауссова шума через квадратичные детекторы, важный для радиотехники и сводящийся к рассмотрению сравнительно широкого класса интегральных уравнений, часто встречающегося в математических исследованиях; 4) вопрос о распределении нулей случайных функций, существенный для ряда приложений (в частности, для теории турбулентности и теории химических реакций) и связанный с целым рядом тонких математических вопросов, лишь в весьма слабой степени разобранных к настоящему времени. Приводятся (без доказательств, но с указанием литературы) отдельные результаты, относящиеся к этим вопросам. А. М. Яглом

6008. **Статистическая модель действия атмосфериков на усилитель. Блан-Лапьер, Савелли, Тортра** (Ètude de modèles statistiques suggérés par la considération des effets des atmosphériques sur les amplificateurs. Blanc-Lapierre André, Savelli Michel, Tortrat André), Ann. télécommuns, 1954, **9**, № 9, 237—245 (франц.)

Усилитель трактуется как линейная система, характеризуемая переходной функцией $R(t)$ (реакция на единичный импульс). В конкретных расчетах принимается $R(t) = e^{-\lambda t} \sin \omega_0 t$. На входе имеется суперпозиция «белого шума» (гауссов процесс с равномерным спектром) и случайных импульсов («атмосферики»), имеющих заданный закон распределения и подчиняющихся общей схеме Пуассона. Решается задача о нахождении статистических характеристик напряжения на выходе усилителя, рассматриваемого как стационарный случайный процесс. Анализируются предельные случаи «большой» и «малой» плотности сигналов (по отношению к постоянной времени усилителя). Полученное авторами выражение для характеристической функции напряжения на выходе вызванного пуассоновской компонентой сигнала не является новым и впервые было опубликовано А. Я. Хинчиным в связи с решением сходной задачи (Изв. АН СССР, сер. матем., 1938, № 3, 313—322). Рассматривается также вопрос о вычислении среднего значения и дисперсии продетектированного сигнала (случай квадратичного детектора). Аналогичная задача рассматривается в книге В. И. Бунимовича «Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах», М., 1951. А. М. Обухов

6009. **Метод разностных уравнений для вычисления вероятности столкновения двух молекул. Ландал** (A difference equation method for the calculation of the probability that two molecules will collide. Landahl H. D.), Bull. Math. Biophys., 1954, **16**, № 2, 155—158 (англ.)

Рассматривается сфера, на 1 $см^2$ поверхности которой за единицу времени порождаются σ молекул. При довольно специальных предположениях о характере случайного блуждания молекул вычисляется математическое ожидание числа молекул, сталкивающихся в течение единицы времени с неподвижной частицей, помещенной в центре сферы. И. И. Гихман

6010. **Заметка о плане непрерывной инспекции Доджа. Либерман** (A note on Dodge's continuous inspection plan. Lieberman Gerald J.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 3, 480—484 (англ.)

Процедура непрерывной инспекции, предложенная Доджем, заключается в следующем: а) проводят 100%-ный контроль изготовляемых изделий до тех пор, пока i изделий подряд не окажутся годными; б) если а) имеет место, переходят к выборочному контролю, беря от каждых K изделий по одному пробному изделию (выборка случайная); в) если пробное изделие б) окажется дефектным, снова переходят к 100%-ному контролю, согласно пункту а); г) все обнаруженные дефектные изделия исправляются или заменяются годными.

Автор доказывает, что при любом течении процесс производства (т. е как бы ни менялась с течение времени вероятность появления дефектного изделия

$$\mathrm{AOQL} \leqslant (k-1)/(k+i), \qquad (1$$

где AOQL — предельное среднее выходное качество равное, по определению, наименьшему из чисел L для которых равна нулю вероятность, что предел пропущенной доли брака больше L, если число циклов (смена сплошного и выборочного контроля) стремится к бесконечности.

Указывается, что равенство (1) возможно, и достигается лишь в том случае, когда в период выборочного контроля все изделия дефектны, а в период 100%-ного контроля все изделия годны.

М. И. Эйдельман

6011. **Планирование одинарного выборочного плана инспекции с фиксированным объемом выборки. Голуб** (Designing single-sampling inspection plan when the sample size is fixed. Golub Abraham), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 262, 278—28 (англ.)

Имеется партия изделий. Доля дефектных изделий в партии обозначается через p. Задаются числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}$ такие, что $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{m-1} < 1$. Партия относится к h-й категории, если доля дефектных изделий в ней $p = p_h$, где $\gamma_{h-1} < p_h \leqslant \gamma_h$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$.

Для определения «категории» партий производят выборку фиксированного объема n. При этом, если доля дефектных изделий l в этой выборке будет удовлетворять неравенствам $c_{h-1} < l \leqslant c_h$, то данную партию относят к h-й категории $(h = 1, \ldots, m)$, где c_i $(0 \leqslant c_1 < c_2 < \cdots < c_{m-1} < n)$ — некоторые числа.

В данной работе рекомендуется следующий метод определения величин c_i. Обозначим через $P(h/p_h)$ вероятность отнесения партии с долей $p = p_h$ к h-й категории $(h = 1, \ldots, m)$ по результату выборки объема n. Тогда в качестве чисел $c_1, \ldots, c_m$ следует выбирать целые положительные числа, ближайшие к тем числам, при которых сумма

$$P = \sum_{h=1}^{m} P(h \mid p_h)$$

достигает максимума.

Приведены формулы и таблицы для определения величин c_h. Р. Х. Дивеев

6012. **О распределении вероятностей сопротивления образца и влиянии его размеров. Давен** (Sur la distribution de probabilité de résistance d'une éprouvette et sur l'influence de ses dimensions. Davin Marcel), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 16, 869—871 (франц.)

«Элементом» автор называет испытываемый образец стандартной длины l и с площадью поперечного сечения S. Про образец, имеющий сечение pS и длину ql (p и q — натуральные числа) говорят, что он составлен из p параллельных и q последовательных элементов; такой образец обозначается $Ep(p \cdot q)$. В основу статистической теории сопротивления под действием растяжения или сжатия кладется принцип Кремера, утверждающий, что сопротивление образца $Ep(1 \cdot q)$ следует закону распределения минимального (т. е. наиболее слабого) из q независимых величин — сопротивлений образцов Ep (1.1); кроме того, закон распределения сопротивления образца $Ep(p \cdot q)$ совпадает с законом распределения суммы сопротивлений p образцов $Ep(1 \cdot q)$. Автор указывает, что в соответствии со сделанным допущением и экспериментом в качестве закона распределения величины сопротивле-

я образца $Ep(1\cdot q)$ может быть взята функция вида $(x)=1-e^{-\left(\frac{x}{x_q}\right)^K}$ $(K>0,\ x_q>0)$. В частных предположениях автор анализирует передачу боковых усий в образцах. Н. В. Смирнов

13. Об одном методе вычисления оптимального объема выборки. Р а й с к и й (O pewnej metodzie obliczania optymalney liczności próbki. R a j s k i C.), Zastosow. mat., 1954, 1, № 3, 212—224 (польск.; резюме русс., англ.)

План одинарного статистического приемочного нтроля по качественному признаку определяется данием объема n выборки и допустимого числа c ефектных изделий в выборке. Заданное среднее едельное выходное качество q_2 может быть обеспечено различными парами чисел n и c. Исследуется опрос о способах такого выбора n и c, который, помимо заданного q_2, обеспечил бы также и должную кономичность контроля. С. Х. Сираждинов

014. Методы измерения полезной жизни оборудования в условиях эксплуатации. Г у д м а н (Methods of measuring useful life of equipment under operational conditions. G o o d m a n L e o A.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 263, 503—530 (англ.)

Пусть оборудование состоит из одновременно работающих N агрегатов k различных типов. Каждый вышедший из строя агрегат немедленно или во время ериодически осуществляемых обследований заменяется овым. Схема замещения определяется известными величинами p_{ij} $(\sum_{j=1}^{k} p_{ij}=1)$, представляющими собой ероятность того, что испортившийся агрегат типа i удет замещен агрегатом типа j. Исходя из соотношения числа агрегатов различных типов после ряда проведенных обследований, автор строит состоятельные оценки абсолютной и относительной долговечности каждого типа.

Несмотря на большой размер статьи, со сравнительно достаточной полнотой исследован только случай двух типов оборудования. Г. И. Егудин

5015. Статистика случайных событий при групповом подсчете. Д е й в и с, Л и ч (The statistics of scaled random events. D a v i e s R. O., L e e c h J. W.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, № 4, 575—580 (англ.)

В простейшем случае потока однородных событий со средним числом ν событий в единицу времени вероятность $P(x, t)$ наступления x событий в промежутке времени t дается, как известно, законом Пуассона $P(x, t)=\exp(-N)\,N^x/x!$, где $N=\nu t$. Если регистрируется лишь каждое n-е событие $(n>1)$, то поток зарегистрированных событий уже не будет простейшим, так как течения его в двух неперекрывающихся промежутках времени уже не будут взаимно независимыми. Вероятность $W^{(n)}(r, t)$ иметь r регистраций за промежуток времени t не будет выражаться законом Пуассона. Основная цель статьи — найти для этой вероятности выражение, более или менее удобное для вычисления моментов и других сводных характеристик. Авторы находят:

$$W^{(n)}(r, t)=\exp(-N)\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}(1-|m|/n)\times \times N^{rn+m}/(rn+m)!. \qquad (1)$$

Для производящей функции

$$M_0^{(n)}(\lambda)=\sum_{r=0}^{\infty}W^{(n)}(r, t)\exp(\lambda r);$$

это приводит к выражению

$$M_0^{(n)}(\lambda)=\frac{4\,\mathrm{sh}^2(\lambda/2)}{n^2}\exp(-N)\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j\exp(N\xi_j)}{(1-\xi_j)^2}, \qquad (2)$$

где $\xi_j=\omega^j\exp(\lambda/n)$, $\omega=\exp(2\pi i/n)$. В общем случае для суммы в правой части не удается найти более удобной формы; однако для (практически наиболее важных) малых значений n такие формы авторами указываются. Для анализа общего случая к выражениям (1) и (2) применяются преобразования Лапласа, что приводит к выражениям значительно более простым и удобным для вычисления сводных характеристик. А. Я. Хинчин

6016. О методах расчета надежности работы систем, содержащих большое число элементов. С и ф о р о в В. И., Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1954, № 6, 3—12

Рассматривается зависимость вероятности нормальной работы системы, состоящей из большого числа элементов, от вероятности выхода из строя каждого элемента. При этом предполагается, что система выходит из строя в том случае, когда выходит из строя хотя бы один из ее элементов. Анализируются различные способы смены элементов системы. Б. А. Севастьянов

6017. Новые результаты в теории пешеходного и уличного движения. М е й н (Some further results in the theory of pedestrians and road traffic. M a y n e A l a n J.), Biometrika, 1954, 41, № 3—4, 375—389 (англ.)

Пешеход может перейти улицу в любой момент, если в течение промежутка времени I после этого момента на перекрестке не появится экипаж. Промежутки времени между последовательными появлениями экипажей могут быть распределены по любому закону $x(t)$, но предполагаются взаимно независимыми. При этих условиях даются выражения: 1) вероятности того, что время ожидания T пешехода равно нулю; 2) лапласова преобразования закона распределения величины T; 3) среднего значения и дисперсии T. В качестве частного случая приводится (известный ранее) вид этих выражений в предположении показательного закона $x(t)$. Если разделить улицу на r проездов и поставить «островок спасения» на рубеже между каждыми двумя соседними проездами, то при том же общем потоке экипажей среднее значение величины T (при оптимальном размещении островков) уменьшается по меньшей мере в r^2 раз. В дальнейшем даются выражения производящих функций для законов распределения числа пешеходов, находящихся в той или другой ситуации (например, переходящих улицу непосредственно после проезда наудачу выбранного экипажа; ожидающих в наудачу выбранный момент времени; и т. п.). В заключительном параграфе приводятся некоторые экспериментальные данные. А. Я. Хинчин

6018. К вопросу об исследовании ошибок профиля кулачков. С е р г е е в В. И., Тр. Семинара по точности механизмов и машин Ин-та машиноведения АН СССР, 1954, № 7, 73—82

Разбирается случай массового изготовления кулачков на фрезерных станках. При некоторых предположениях устанавливается, что отклонение размеров кулачка от номинала (по нормали к профилю) представляет собой стационарный нормальный процесс, где за независимое переменное выбран угол поворота кулачка. Даются практические рекомендации, касающиеся настройки станков, изготовляющих кулачки. Л. Н. Большев

6019 Д. К вопросу эффективности приемочного статистического контроля. Б е к т а е в К. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. и механ. АН УзССР, Ташкент, 1955

См. также: 5511, 5534 К, 5588, 5923, 5943, 6038

ГЕОМЕТРИЯ

6020. **Относительность размера.** Гофман (The relativity of size. Hoffmann Banesh, Phys. Review, 1, Ser. 1953, 89, 49—52 (англ.)
См. РЖФиз., 1954, 3400.

6021. **Квазипрямоугольные треугольники с целочисленными сторонами.** Свенониус (Quasirechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seiten. Svenonius Björn), Elementa (1953), 36, 261—265 (нем.)

6022. **Добавление по применению трилинейных координат.** Ригби (An extension in the use of triangular coordinates. Rigbi Zvi), Appl. sci. Research, 1953, A3, 462—463 (англ.)

6023. **О степени точки.** Дютрон (Sur la puissance d'un point. Dutron O.), Mathesis, 1954, 63, № 3—5, 120—123 (франц.)

Через точку M в плоскости треугольника ABC, не лежащую на его сторонах, проводятся прямые, проходящие через вершины треугольника и делящие его стороны в отношениях $\gamma:\beta$, $\alpha:\gamma$, $\beta:\alpha$ ($\alpha+\beta+\gamma=1$). Берется произвольная точка P и с помощью теоремы Стюарта выводится соотношение:

$$\sum \alpha PA^2 - PM^2 - \sum a^2\beta\gamma = 0. \qquad (1)$$

Помещая P в центр O описанной окружности, получаем выражение для степени точки относительно этой окружности:

$$\omega(M) = -\sum a^2\beta\gamma. \qquad (2)$$

Понимая под P центр O' произвольной окружности (O'), приходим к соотношению

$$\sum \alpha\omega'(A) + \omega(M) = \omega'(M), \qquad (3)$$

где ω' — степень относительно окружности (O').

Полученные формулы (2), (3) применяются для определения степеней замечательных точек треугольника относительно описанной окружности и для нахождения расстояния между ними. В частности, для нахождения расстояния от ортоцентра H до центра вписанной окружности (I) точку M в (3) помещают в I, а за (O') принимают окружность, описанную около треугольника, антидополнительного данному (центр ее в H, а радиус $=2R$).

В статье допущен ряд опечаток; в частности, в основных формулах всюду вместо $\Sigma a^2\beta\gamma$ нужно $\Sigma a^2\beta\gamma$.
А. Т. Школьник

6024. **Теорема Фаркаша Бойаи о равносоставленности многоугольников.** Варга (Bolyai Farcas átdarabolási tétele. Varga Tamás), Mat. lapok, 1954, 5, № 2—3, 101—114 (венг.; резюме русс., нем.)

Если два многоугольника равновелики, то всегда возможно расчленить их на конечное число попарно равных многоугольников. Популяризация этой теоремы, первое доказательство которой дано венгерским математиком Фаркаш Бойаи, является предметом этой статьи. Причем дано упрощение первоначального доказательства теоремы. Резюме автора

6025. **Новые аксиоматические основы евклидовой геометрии.** Блан (Nouvelles bases axiomatiques de géométrie euclidienne. Blanc Eugène), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 203—204 (франц.)

Пусть E — множество элементов $a, b, c, \ldots$, называемых точками. Задается семейство «сравнений» F. Класс точек множества $D \subset E$ «сравнимых по модулю δ» называется прямой «направления δ». F называется имеющим евклидову структуру,

1) если всякая прямая имеет не менее двух то
2) если $a \neq b$, то существует прямая D «напра
ния δ» такая, что $a, b \in D$, т. е. $a \equiv b\,(\delta)$;
3) если $a \neq b$, $a \equiv b\,(\delta_1)$ и $a \equiv b\,(\delta_2)$, то $\delta_1 = \delta_2$.
Плоскость характеризуется тем свойством, что
прямые на ней либо параллельны, либо пересекаю
причем параллельность определяется обычным пу
Прямая, имеющая две точки плоскости, лежит в
ледней.

Вводятся еще две аксиомы:

1. Если a, b, c не лежат на одной прямой, m
жит внутри bc, то прямая, проходящая через m пар
лельно ab, пересекает bc в точке $n \neq a, b, c, m$.

2. Если $aa' \parallel bb'$, $a'a'' \parallel b'b''$, $ab \parallel a'b' \parallel a''b''$, то $aa'' \parallel$
А. С. Кован

6026. **Аксиоматическое определение тензорного числения.** Кустаанхеймо (An axiomatic finition of the tensor calculus. Kustaanheimo Paul Edwin), Proc. Internat. Congr. Ma 1954, 2, Amsterdam, 37—38 (англ.)

Указывается, что классическое тензорное исчисле может быть построено на основе 28 чисто алгебраических аксиом. Аксиомы не приводятся, а излагается ли основное содержание аксиом. Множество тензо определяется как кольцо, в котором, наряду с опе циями сложения, вводится взаимно однозначная и дитивная операция сопряжения ($A \leftrightarrow A.$), причем т буется, чтобы сопряжение произведения совпада с произведением сопряженных сомножителей, взят в обратном порядке, т. е. $AB \leftrightarrow B.A.$ Кольцо моя быть сконструировано из конечного числа базисн тензоров $E_1, E_2, \ldots, E_m$ и им сопряженных, обладающ свойствами: произведение базисных тензоров и ска ров коммутативно, а произведение сопряженных э ментов есть скаляр, являющийся элементом заданно поля. Минимальный базис $E_1, E_2, \ldots, E_n$ называется ординатной системой, а число n — размерностью т зорного пространства. Каждый тензор представляет полиномом относительно базисных тензоров со скаля ными коэффициентами, которые называются компоне тами тензора. Компоненты тензора изменяются по те зорному закону при изменении базиса. Вводятся о рации над тензорами. Автор отмечает, что аксимат ческое определение тензоров позволяет распростран тензорное исчисление на случай конечных полей.
В. И. Ведерник

6027. **Замечания к проективной дифференциальн геометрии.** Чех Э. (Megjegyzések a projektív di ferenciálgeometriához. Čech E.), A magyar tu akad. mat. és. fiz. oszt. közl., 1953, 3, № 2, 219—2 (венг.)

Доклад, прочитанный 17-го декабря 1952 г. на зас дании, посвященном 150-летию со дня рожден И. Бойаи. Содержит обзор развития теории проек тивного изгибания поверхностей и конгруэнций пр мых и некоторые результаты автора о соответствии ме ду двумя n-мерными проективными пространства (Чех Э., Проективно-дифференциальная геометрия с ответствий между двумя пространствами, Csehszlová matematikai közlony, 1952, 2 (77), № 2, 4). М А. Акив

6028 К. **Введение в теорию относительности.** Дей видсон (Interoduccion a la relatividad. Davi son M., Barcelona, Editorial Seix Barral, S. A 1953, 123 p.), Euclides, 1954, 14, № 155, 30 (библ

6029 К. **Начала геометрии.** Мендес (Rudimen tos de geometria e desenho geométrico. 6-ed. Me des Justina, Rio de Janeiro, Francisco Alves

1953, 77 p., 12.00 Cr.), Bol. bibliogr. brasileiro, 1953, I, № 4, 18 (библ.)

6030 К. **Сборник задач по синтетической геометрии. Черняев М. П.** (Пособие для пед. ин-тов), М., Учпедгиз, 1954, 72 стр., 1 р. 15 к.

6031 К. **Изучающим чистую математику. I. Алгебраическая геометрия на плоскости. II. Чистая геометрия и тригонометрия. Грин** (Advanced level pure mathematics. I. Algebraic plane geometry, 128 p., IV. 6 s.; II. Pure geometry and trigonometry, 129—264 p., IV, 6 s. Green S. L., University Tutorial Press, 1953), Math. Gaz., 1954, 38, № 323, ii (библ.)

6032 К. **Курс высшей математики. Часть 1. Аналитическая геометрия и тригонометрия. Георгиу** (Curs de matematici superioare. Partea 1: geometrie analitică şi trigonometrie. Gheorghiu Th. Gh. Timişoara, Editura Institutului politehnic, 1953, 192 p.), Bul. biblicgraf. cartii, 1954, 3, № 10, 14 (библ.)

6033 К. **Руководство по аналитической геометрии в пространстве** (Indrunar la curaul de geometrie analitica in spatiu. Bucuresti, Universitaten «C. I. Parhon». Facultatea de Matematice si Fisica. Secita fara frecventa, 1953, 32 p.), Bul. biblicgr. cartii, 1954, 3, № 4, 7 (библ.)

6034 Д. **Наглядная аксиоматика без отрицания проективной геометрии. Декуа** (Axiomatique intuitionniste sans négation de la géométrie projective. Dequoy Nicolle. Paris, Gauthier-Villars, 1954, 110 pp.), Bibliogr. France, 1954, 143, № 50, 1 partie, 1111 (библ.)

6035 Д. **Прямая геодезическая задача. Сержанов А. Е.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1954

6036 Д. **Вопросы теории и методики геометрических построений в пространстве. Пикус А. Л.** Автореф. дисс. канд. пед. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1955

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

6037. **Проекции гексаэдроида тетраэдрического на плоскости чертежа. Перельман Ф. М.,** Изв. Сектора физ.-хим. анализа ИОНХ АН СССР, 1954, 25, 61—69

Для изображения состава пятикомпонентных взаимных систем из двух ионов одного знака и четырех ионов другого знака рассмотрены проекции неправильной четырехмерной фигуры, называемой автором гексаэдроидом тетраэдрическим (его восемь вершин отвечают восьми исходным солям, шестнадцать ребер — шестнадцати двойным, а четырнадцать граней — четырнадцати тройным, простым и взаимным системам; шесть ограничивающих трехмерных фигур — два тетраэдра и четыре треугольные призмы — соответствуют двум простым и четырем взаимным четверным системам, входящим в состав пятерной; состав пятерной системы изображается внутренней точкой рассматриваемой четырехмерной фигуры). Эта фигура известна по работе Н. И. Гулак «Опыт геометрии о четырех измерениях» (Тифлис, 1877).

Начало прямоугольной четырехмерной системы координат помещено в центре гексаэдроида тетраэдрического. Из шести возможных проекций на координатные плоскости основное внимание уделено проекции на плоскость ZT, равносильной проекции гексаэдроида лучами, параллельными двум соответствующим параллельным граням обоих тетраэдров, на три смежные грани, примыкающие к одному ребру. Эта проекция отвечает требованиям практики: изображение компонент может быть выполнено в одном масштабе и две из исходных солей изображаются не суммарно, а каждая в отдельности. Библ. 10 назв. А. Р. Зенгин

6038. **Геометрический фактор в изменении ощущения теплоты, вызванного радиацией. Райт** (A geometrical factor in the variability of sensations of warmth evoked by radiation. Wright G. H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, № 3, 474—484 (англ.)

Отправляясь от исследований Кендалла и Ренкина (Kendall D. G., Rankin R. A., Quart. J. Math., 1953, 4, ser. 2, 178—189), автор эмпирическим путем подсчитывает число точек геометрически правильной решетки, покрываемых некоторым многократно подбрасываемым кругом. При этом в одном случае решетка оказывается образованной точками, являющимися центрами правильных треугольников, в другом — центрами квадратов, в третьем — центрами правильных шестиугольников. Для каждого размера бросаемого круга в его отношении к площади одной ячейки решетки и для каждого вида решетки подсчитывается мера отклонения (standard deviation) числа покрываемых точек от среднего числа покрываемых точек, после чего находится коэффициент вариации V как процент меры отклонения от указанного среднего. Этот коэффициент характеризует для каждого размера круга степень изменения числа покрываемых точек при многократном бросании этого круга. Как показывают подсчеты, коэффициент вариации почти одинаков для всех трех решеток, он очень мал для больших кругов и велик для малых.

Рассматривая далее кожу как носительницу дискретной совокупности точек, восприимчивых к теплоте, автор предлагает считать эту совокупность похожей на ту или иную геометрическую решетку. Если теперь представить себе тепловую радиацию как воздействие на кожу некоторого достаточно малого раздражителя, имеющего форму круга, то при попеременном воздействии этого раздражителя на разные участки кожи в его поле попадает разное число чувствительных точек, а это, в соответствии с тем, что было сказано выше о коэффициенте вариации, приводит к изменению ощущения теплоты.

Подобные же соображения могут быть приложены и к точечному раздражению кожи посредством прикосновения, и к раздражению сетчатки глаза светом, и к раздражению поверхности мозга электродами.

Н. И. Кованцов

6039. **Векторная алгебра и потенциалы. Титт, Мак-Калли, Доналдсон, Осборн, Уэртингтон, Лонг** (Vector algebras and potentials. Titt E. W., McCulley W. S., Donaldson Fletcher W., Osborn Roger, Worthington L. G., Long W. C.), J. Rational Mech. and Analisis, 1953, 2, № 3, 413—442 (англ.)

Ставится вопрос о классификации различных форм потенциалов как решений уравнений в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассматривается уравнение (a) с присоединенным уравнением (b) (в символах тензоров):

$$A^{ij}u_{ij} + B^i u_i + Cu = f(x^i) \quad \ldots \quad (a)$$

$$A^{ij}v_{ij} - B^i v_i + Cv = 0 \qquad \ldots \quad (b)\ (A^{ij} = A^{ji}).$$

Изучается потенциал как функция аргумента $X^i = x^i - \xi^i$, которая удовлетворяет уравнению (b). Уравнения (a) классифицируются на: 1) непараболические $|A^{ij}| \neq 0$, 2) параболические $|A^{ij}| = 0$, $\widetilde{A}_{ij}B^iB^j = 0$, где $\widetilde{A}_{ij}$ — минор A^{ij} в $|A^{ij}|$. Соответственно с этим потенциалы классифицируются на непараболические и параболические. В статье изучаются «потенциалы Грина»

и «запаздывающие». Приведены таблицы формул тех и других видов потенциалов для пространства измерений $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Этой теории предшествует установление того математического аппарата (векторы, тензоры, матрицы), в символах которого излагается теория. Устанавливается следующая алгебра. Вводится система ковариантных векторов: $L_{i/\omega}$ и l_i^α и система контравариантных векторов: L^i и l_α^i ($i = 1,2,\ldots,n$; $\alpha = 1,2,\ldots,n-1$), которые удовлетворяют условиям:

$$L_{i/\omega}L^i = 1,\ L_{i/\omega}\,l_\alpha^i = 0,\ L^i\,l_i^\alpha = 0,\ l_\alpha^i\,l_i^\beta = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

Один из определителей $\begin{vmatrix} L_{i/\omega} \\ l_i^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_i^{n-1} \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} L^i \\ l_1^i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_{n-1}^i \end{vmatrix}$ равен 1.

Далее накладываются ограничения, дающие следующую классификацию этой алгебры. Вводятся симметрические матрицы A^{ij} $(n-1)$-го порядка: непараболические $A^{ij} \neq 0$, параболические $|A^{ij}| = 0$. Векторы $L_{i/\omega}$ классифицируются на: нехарактеристические ($A^{ij}L_{i/\omega} \times L_{j/\omega} \neq 0$) и характеристические (тип I — все $A^{ij}L_{j/\omega} = 0$, тип II — не все $A^{ij}L_{j/\omega} = 0$).

Соответственно с этим получаются четыре алгебры:
1) $N-P$, $N-C$ непараболическая нехарактеристическая;
2) $N-P$, C непараболическая характеристическая;
3) P, $N-C$ параболическая нехарактеристическая;
4) P, C параболическая характеристическая.

Для теории непараболических потенциалов применяются алгебры $N-P$ и $N-C$, а для параболических — алгебры P и C. Параболический потенциал изучается как предельный случай непараболического.

А. С. Кованько

6040. Проективные соотношения в плоской кинематике. Данкан (Projective relations in plane kinematics. Duncan W. J.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, 7, № 3, 352—356 (англ.)

Рассматриваются жесткие фигуры r, s, t,... и т. д., совершающие движения в общей плоскости. Точки rt, st и rs, являющиеся мгновенными центрами относительного вращения, лежат на одной прямой, а относительные угловые скорости удовлетворяют соотношению

$$\omega_{rt}\overline{tr \cdot rs} = \omega_{st}\overline{ts \cdot sr}, \qquad (1)$$

где $\overline{tr \cdot rs}$ и $\overline{ts \cdot rs}$ — направленные отрезки этой прямой. С помощью (1) доказываются теоремы Менелая и Дезарга. Доказывается, что всякая совокупность $\frac{n}{2}(n-1)$ точек, расположенных по три на одной прямой, может рассматриваться как возможная конфигурация мгновенных центров относительного вращения n фигур. Центральная проекция конфигурации мгновенных центров на любую плоскость дает, таким образом, также некоторую конфигурацию мгновенных центров.

С. Г. Кислицын

6041. О геометрической форме часовых пружин. Жорж (Sur la forme géométrique des ressorts moteurs d'horlogerie. George Paul), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 3, 236—237 (франц.)

Отыскивается такая геометрическая форма пружины, для которой максимальная усталость металла имела бы постоянную величину F во всякой точке внешнего витка, около которого происходит разрыв пружины.

Форма пружины, заведенной до отказа, может быть уподоблена эвольвенте окружности: $\rho^2 = (e/\pi)\,s$, где ρ — радиус кривизны эвольвенты, s — длина дуги, e — толщина пружины. Проблема сводится к отысканию кривой C, радиус кривизны которой ρ_0 удовлетворяет соотношению: $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{2F}{eE}$, где E — модуль Юнга.

Параметрические уравнения C (с точностью до положения):

$$X_0 = \int_0^s \cos g(s)\,ds,\quad Y_0 = \int_0^s \sin g(s)\,ds$$

при помощи замены переменной $(2\rho/ek) - k = \theta$, где $k^2 = E/F$, могут быть выражены через $x = \cos(\pi/2)\,\theta^2$, $y = \sin(\pi/2)\,\theta^2$ и $X = \int_0^\theta x\,d\theta$, $Y = \int_0^\theta y\,d\theta$, и при надлежащем выборе K такого, чтобы $\sin(\pi/2)\,K^2 = 0$, $\cos(\pi/2) \times K^2 = 1$, и при переносе начала координат получим

$$X_0 = \frac{e}{2}K^2(y + \pi KX),\quad Y_0 = \frac{e}{2}K^2(x - \pi KY).$$

Когда x и y можно пренебречь по сравнению с πKX и πKY, то получается спираль Корню.

Практическим результатом является улучшение пружины при помощи более правильного расположения витков спирали.

В. С. Люкшин

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6042. Упрощенный способ построения прямоугольных диметрических проекций. Гулисашвили А. А., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1954, № 34, 1—9 (резюме груз.)

6043. Приложение гиперболических функций к выводу формул тригонометрии прямоугольного треугольника в плоскости Лобачевского планиметрическим путем. Петрониевич (Примена хиперболних функција на извођење тригонометријских формула праволинијског правоуглог троугла Лобачевскове равни чисто планиметријским путем. Петронијевић Бранислав), Зб. радова Српска АН, 1953, 35, № 3, 289—299 (серб.; резюме франц.)

Изложение вывода формул тригонометрии прямоугольного треугольника плоскости Лобачевского (см., например, Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, Гостехиздат, 1949, гл. IV, VII).

Г. С. Бархин

6044 К. Начертательная геометрия. Иерусалимский А. М. (Учебник для механ.-технол. вузов). М., Гостехиздат, 1954, 304 стр., 7 р.

6045 К. Сборник задач по начертательной геометрии с решениями типовых задач. Арустамов Х. А., Изд. 4-е, М., Машгиз, 1954, 376 стр., 11 р. 10 к.

6046 К. Начертательная геометрия и пространственные сечения. Часть 1. (2) (Deskriptivni geometrie a stereotomie. Čast 1, (2), Praha, 1954, 200 s., 13—20 Kčs.), Česka kniha, 1954, № 37, 943—944 (библ.)

6047 К. Начертательная геометрия. Отто (Geometria wykreślna. Otto Edward, Warszawa, Pánstw. Wydawn. Nauk, 1954, 270 s., 16.20 zł.), Przew. bibliogr., 1954, 10, № 49, 669 (библ.)

6048 К. Начертательная геометрия. 2. Думитреску, Александру, Груя (Geometrie

descriptivă. Fasc. 2. Dumitrescu, Alexandru I., Gruia Leo. 73 p. cu fig., Bucureşti, curs litografiat, 1954), Bul. bibliogr., 1954, А3, № 14, 7 (библ.)

6049 К. **Начертательная геометрия. 3. Ботез, Думитреску** (Geometrie descriptivă. Fasc. 3. Botez M., Dumitrescu. 180 p. cu fig., Bucureşti, curs litografiat, 1954), Bul. bibliogr., 1954, А3, № 14, 6 (библ.)

6050 К. **Начертательная геометрия. Часть 1. Рышанова** (Deskriptivni geometrie. 1 část. Ryšanova Emilie, Praha, SNTL, 1954, 153 s., il., 10.20 Kčs), Česka kniha, 1954, № 37, 946 (библ.)

6051 К. **Начертательная геометрия. Урбан** (Deskriptivni geometrie. Urban Alois. Praha, SNTL, 1954, 292 s., 16.30 Kčs), Česka kniha, 1954, № 42, 1061 (чеш.)

6052 К. **Начертательная геометрия. Том I. Основные понятия. Ортогональная проекция на две плоскости. Общая аксонометрия. Рёйттер** (Darstellende Geometrie. 2 Bde. Bd. I. Grundbegriffe. Orthogonale Zweitafelprojektion. Allgemeine Axonometrie. Reutter Fritz, Wissenschaftliche Bücherei. Gruppe Mathematik, 146 S., 148 Abb., 8.50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 9, 321 (библ.)

6053 К. **Численные задачи начертательной геометрии. Гомис** (Problemas numericos de geometria descriptiva. I vol. 1 fasc., 1 ed. Gomes Marcos Expedito Candido; Rio de Janeiro, Inst. tecnico de ensino por correspondencia, 1953, 34 f., 40.00 doll.), Bol. bibliogr. brasiliero, 1953, 1, № 3, 15 (библ.)

6054 Д. **I. Очерк развития теории геометрических построений в плоскости Лобачевского. II. О геометрических построениях в плоскости Лобачевского, выполняемых без помощи линейки. Рогаченко В. Ф.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Львовск. ун-т, Львов, 1954

6055 Д. **Кривые поверхности и их линейное изображение. Колотов К. С.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Киевский инж.-строит. ин-т, Киев, 1955

6056 Д. **О некоторых построениях в плоскости Лобачевского с помощью одной линейки. Демаховская Р. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ростовск. ун-т, Ростов н/Д, 1955

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6057. **О числе точек алгебраического многообразия в простом конечном поле. Нисневич Л. Б.**, Докл. АН СССР, 1954, 99, № 1, 17—20

Пусть V — абсолютно неприводимое многообразие степени m_V, заданное в n-мерном проективном пространстве $\Pi(p)$ над полем вычетов по модулю p, N_V — число точек в V, r_V — его размерность. Доказывается, что

$$\left| N_V - p^{r_V} \right| \leqslant c p^{r_V - 1/2},$$

где c зависит только от m_V и n. Отсюда следует, что для достаточно больших p абсолютно неприводимое многообразие непусто в $\Pi(p)$. Л. А. Скорняков

6058. **Огибающие однопараметрического семейства многообразий размерности $n-1$ в пространстве размерности n. Бугон** (Enveloppes d'une famille à un paramètre de variétés de dimension $n-1$ dans un espace de dimension n. Boughon Pierre), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 6, 641—644 (франц.)

Задается произвольное поле k характеристики p и его совершенное расширение K. Уравнение $F = 0$, где $F \in k[t, x_1, \ldots, x_n]$, определяет однопараметрическое семейство гиперповерхностей, причем предполагаются выполненными следующие условия: 1) F неприводимо над $k[t]$; 2) $F \notin k[t, x_1^p, \ldots, x_n^p]$; 3) $F \notin k[t^p, x_1, \ldots, x_n]$. Рассматриваются гиперповерхности этого семейства, соответствующие всем значениям $t = t_0 \in K$.

Рациональный над K цикл E называется огибающей семейства, если для любой неприводимой составляющей E' цикла E и общего цикла V_t семейства пересечение $E' \cdot V_t = \Sigma a_i Y_i$ содержит хоть один такой цикл Y_i, что E' и V_t касаются в общей точке Y_i.

Доказывается, что если характеристика поля k равна 0, то алгебраическое многообразие, уравнение которого получается исключением параметра t из уравнений $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, содержит огибающую. В случае характеристики $p \neq 0$, сверх того, огибающие содержатся в многообразиях, уравнения которых получаются исключением t из F и любого многочлена $G \in k[t, x_1^p, \ldots, x_n^p]$. И. Р. Шафаревич

6059. **Число точек многообразий в конечном поле. Лан, Вейль** (Number of points of varieties in finite fields. Lang Serge, Weil André), Amer. J. Math., 1954, 76, № 4, 819—827 (англ.)

Над конечным полем k, состоящим из q элементов, рассматривается абсолютно неприводимое r-мерное алгебраическое многообразие V, расположенное в n-мерном проективном пространстве и имеющее степень d. Для числа N точек многообразия V, имеющих координаты в k, доказывается неравенство

$$|N - q^r| \leqslant \delta q^{r-1/2} + A(n, d, r)\, q^{r-1}, \quad \delta = (d-1)(d-2).$$

Тот же результат получен независимо Л. Б. Нисневичем (РЖМат, 1955, 6057) (за исключением того, что константа δ не вычислена точно, хотя и может быть очевидным образом найдена, исходя из рассуждений Л. Б. Нисневича). Доказательство в принципе совпадает с доказательством Л. Б. Нисневича.

Приводится несколько приложений этого результата, например, показывается, что на V существует нульмерный цикл, рациональный над k и имеющий степень 1. И. Р. Шафаревич

6060. **О линейчатой поверхности четвертого порядка. Севрен** (Sur une surface réglée du quatrième ordre. Sevrin A.), Mathesis, 1953, 62, 303—314 (франц.)

6061. **Замечание к моей работе «Некоторые теоремы об абелевых многообразиях». Мацусака** (A remark on my paper «Some theorems on abelian varieties». Matsusaka Teruhisa), お茶の水女子大學, 自然科學報告 (Otyanomidzu dzёsi dajgaku, Сидзэн кагаку хококу—Natur. Sci. Rept. Ochanomizi Univ.), 1954, 4, № 2, 172—174 (англ.)

Вносятся исправления и упрощения в доказательство основной теоремы предыдущей статьи автора (РЖМат, 1955, 2838). В. В. Морозов

6062. **Об алгебраических многообразиях V_3, обладающих антиканонической системой. Рот** (Sulle V_3 algebriche che possiedono un sistema anticanonico. Roth Leonard), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 434—439 (итал.)

Статья касается проблемы (поставленной Кастельнуово) об исследовании вполне регулярных многообразий V_3, для которых операция присоединения обрывается. Согласно теореме Кастельнуово-Энриквеса, такая поверхность—или рациональная или приводимая к линейчатой (иррациональной). Первый случай характеризуется тем, что сама поверхность или ее бирациональное преобразование обладает антиканонической системой. По аналогии с этим автор считает, что

и исследование многообразий V_3 следует начать с таких, которые обладают антиканонической системой.

В статье резюмируются результаты, полученные в этом направлении, и даются примеры нерегулярных многообразий V_3, для которых присоединение обрывается, причем показано, что они не ограничиваются многообразиями, образованными пучками рациональных поверхностей.

Автор начинает с аналогичной проблемы для поверхности, выставляя те элементарные приемы, которые могут быть перенесены на случай V_3. Пусть F будет поверхностью с эффективной канонической виртуальной системой с обратным знаком; это значит, что если $|C|$ — общая система кривых на F, то будет эффективна система $|C-C'| = |a|$, которую автор и называет антиканонической (само это понятие введено Кастельнуово). В таком случае для поверхности F имеются свойства: 1) геометрический род p_g и Pi (plurigeneri) все будут нулями, 2) на F процесс последовательного присоединения обрывается, 3) степень n и род π системы $|C|$ удовлетворяют неравенству: $n > 2\pi - 2$, 4) система, присоединенная к $|a|$, — порядка, равного нулю.

Отсюда, линейчатая поверхность рода $p > 0$ не может обладать антиканонической системой.

Из свойства (1) или (3) можно получить (D'Orgeval, Rend. Accad. Lincei, 1948, (8), 4, 791), что поверхность рациональна, если она сама или одно из ее бирациональных преобразований обладает антиканонической системой.

Каждое из трех первых свойств, указанных выше, влечет за собой два остальных: измерение системы $[a]$ не превосходит числа 9 и существуют типы поверхностей, для которых этот максимум достигается.

Далее автор переходит к многообразию V_3, лишенному особенностей. Если $|C|$ есть общая система поверхностей на V_3, то присоединенная система $|C'|$ вполне определена; если система $|A| = |C-C'|$ эффективна, то автор называет ее антиканонической системой на V_3 (понятие введено Фано (Fano, Atti Congr. Internaz. Bologna. 1931, 4, 115). В этом случае имеют место свойства 1) и 2) и тогда легко вытекает справедливость свойства, аналогичного 3): степень n и криволинейный род π системы $|C|$ удовлетворяют неравенству $n > \pi - 1$.

Если $A' = 0$, то для исходной неприводимой поверхности A обращаются в нули и p_g и P_i, и она не имеет исключительной кривой, но может быть как регулярной, так и нерегулярной (в последнем случае гиперэллиптической). Однако система $|A|$ может иметь кратные базисные элементы и тогда представляются разнообразные возможности; некоторые частные случаи исследованы Фано (Fano, Mem. R. Accad. d'Italia, 1937, 8, 23) и автором (Rend. Accad. Lincei, 1950, (8), 9, 246; Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, 48, 233).

Автор отмечает, что в настоящем положении теории многие вопросы еще ожидают ответа, например неизвестно, является ли свойство 2) следствием свойства 1) или следует из последнего свойство 3).

В случае нерегулярного V_3, для которого по крайней мере один из характеров q_1 или q_2 отличен от нуля, приходится рассматривать различные случаи и здесь классификация всех типов потребовала бы применения трансцендентных методов, поэтому автор ограничивается иллюстрацией двух из возможных случаев.

Рассматривается многообразие V_3 пар точек кривой C жанра π (> 0) и поверхности F без исключительной кривой первого вида; исследование ведется на основе формулы Севери для виртуальной канонической поверхности на V. При $\pi = 1$ поверхность F должна быть рациональной, поверхность A будет гиперэллиптической поверхностью, содержащей два пучка эллиптических кривых.

Далее предполагается, что $\pi = 0$ и F рациональна. В обоих случаях V образовано пучком рациональных поверхностей. Аналогичный случай получается, если $\pi = 0$ и F — поверхность с канонической кривой n-порядка, равного нулю; тогда A представляет собой пару поверхностей (из рационального пучка) без общих точек.

В качестве второй иллюстрации V_3 автор берет в S_4 цилиндр, имеющий основанием общую кубическую поверхность в S_3; такое многообразие содержит линейную систему (трех измерений) гиперэллиптических поверхностей, для которой характеристическая кривая оказывается сложной.

В заключение автор приводит некоторые результаты, относящиеся к затронутой теме и полученные им ранее (Rend. Accad. Lincei, 1952, (8), 12, 265). С. С. Бюшген

6063. Исследования, касающиеся матричных многообразий и их идеалов. Гаэта (Ricerche intorno alle varietà matriciali ed ai loro ideali. Gaeta Federico), Atti IV congr. Unione mat. ital. 1953, 2, 326—328 (итал.)

Рассматриваются H-идеалы (однородные идеалы) $\mathfrak{a} = (\mathfrak{A}_{pq})$, порожденные минорами высшего порядка p однородной матрицы $\mathfrak{A}_{pq} = \| a_{ij} \|$, элементами которой служат формы от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Ранг идеала $\mathfrak{A}$, $r \leqslant q - p + 1$, причем $p \leqslant q$, $q - p + 1 \leqslant n$. Если $r = q - p + 1$, то идеал $\mathfrak{A}$ несмешанный и совершенный, о матрице говорят, что она неособая, и алгебраическое многообразие имеет размерность $d = n - (q - p + 1)$. Совокупность однородных матриц $\mathfrak{A}_{qp}$ таких, что матрица $\mathfrak{A}_{pq}\mathfrak{A}_{qp}$ также однородная и притом равна $\begin{Vmatrix} h & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h \end{Vmatrix}$ определяет идеал $\mathfrak{b}$, порождаемый формами h. В случае максимального ранга r идеалы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ совпадают. Такое видоизмененное определение $\mathfrak{A}$ позволяет высказать некоторые теоремы делимости идеалов, например: если $\mathfrak{A}_{p,\,p-1}$ — неособая подматрица матрицы $\mathfrak{A}_{pq}$, то $\mathfrak{a} = (\mathfrak{A}_{pq}) = (f_1, \ldots, f_r) : (\mathfrak{A}_{p,\,p-1})$, $(\mathfrak{A}_{p,p-1}) = (f_1, \ldots, f_r) : (\mathfrak{A}_{p,\,q})$, где f_i суть окаймляющие миноры $\mathfrak{A}_{p,\,p-1}$, получаемые присоединением $r = q - p + 1$ остающихся столбцов матрицы $\mathfrak{A}_{pq}$.

Получаемые соотношения делимости автор истолковывает с точки зрения теории алгебраических многообразий.

В. В. Рыжков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

6064. О плоских локсодромиях. Вундерлих (Über die ebenen Loxodromen. Wunderlich Walter), Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1953, Abt. 2a, 162, № 5—7, 285—292 (нем.)

Локсодромии суть изогональные траектории семейства меридианов поверхности вращения (или, что то же, линии на поверхности вращения, которые пересекают плоскости меридианов под постоянным углом γ). Всякая плоская локсодромия является двойной локсодромией, т. е. она служит локсодромией для двух поверхностей вращения, расположенных зеркально-симметрично относительно плоскости локсодромии. В работе рассматриваются плоские локсодромии при различных предположениях относительно осей указанной выше пары поверхностей вращения (оси параллельны, пересекаются, изотропны). Наряду с действительными рас-

матриваются при этом мнимые оси поверхностей вращения и комплексные значения угла γ.

Доказываются следующие свойства плоских локсодромий:

1. Плоская локсодромия, вообще, есть четырехкратная локсодромия. Четыре оси поверхностей вращения, на которых она расположена, образуют четырехгранник с изотропными боковыми сторонами, симметричный относительно плоскости локсодромии. Углы $\pm\alpha$, $\pm\alpha^*$ осей с плоскостью локсодромии удовлетворяют условию $\sin\alpha \cdot \sin\alpha^* = 1$; для соответствующих углов локсодромии γ, γ^* имеем $\sin\gamma : \sin\gamma^* = \sin\alpha$.

2. Осепараллельные плоские касательные сечения поверхности вращения постоянной полной кривизны суть локсодромии последней и, сверх того, суть меридианы некоторой поверхности вращения постоянной полной кривизны. Они изображают плоские (двойные) локсодромии с парой параллельных осей.

3. Плоские (двойные) локсодромии с изотропными осями (пары) суть ортогональные траектории линейной последовательности окружностей. (Линейная последовательность окружностей—однопараметрическое семейство окружностей, возникающих из одной и той же окружности радиуса $r = 1$ посредством гомотетических преобразований с общим центром). Н. Г. Туганов

6065. **Общий метод получения формул Френе в неевклидовом пространстве. Михэйляну** (O metodă generală de obținere a formulelor lui Frenet în spațiile neeuclidiene. Mihăileanu N.), Bul. științ. Sec. mat. și fiz., 1953, 5, № 4, 493—502 (рум.; резюме русс., франц.)

Уравнение абсолюта пространства записывается в виде $hx_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, где $1/h$ — кривизна пространства, x_0, x_1, x_2, x_3 — однородные координаты точки пространства x. Скалярным произведением двух векторов (точек) x и y называется сумма $xy = hx_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Координаты точек нормируются так, что $xx = hx_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = h$. Если точка x описывает кривую, то $x = x(t)$. С этой кривой связывается репер $\alpha_0 = x$, $\alpha_1 = a_{10}x + a_{11}x'$, $\alpha_2 = a_{20}x + a_{21}x' + a_{22}x''$, $\alpha_3 = a_{30}x + a_{31}x' + a_{32}x'' + a_{33}x'''$. Коэффициенты a_{ij} находятся из условий $\alpha_i\alpha_i = h$, $\alpha_i\alpha_j = 0$ $(i = j)$. При этих же условиях, положив $d\alpha_i / dt = \rho_{ij}\alpha_j$, находят следующие формулы Френе пространственной кривой:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{\alpha_0}{\rho_1} + \frac{\alpha_2}{\rho_2}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{\alpha_1}{\rho_2} + \frac{\alpha_3}{\rho_3}, \quad \frac{d\alpha_3}{dt} = -\frac{\alpha_2}{\rho_3},$$

где $\rho_1 = a_{11}$, $\rho_1\rho_2 = a_{22}$, $\rho_1\rho_2\rho_3 = a_{33}$ (ρ_i — радиусы кривизны кривой). Принимая за параметр длину дуги кривой, определяемую равенством $ds^2 = h\,dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, можно заключить, что $\rho_1 = \sqrt{h}$, $1/\rho_2^2 = x''x'' - 1/h$, $1/\rho_3^2 = |xx'x''x'''| / (x''x'' - 1/h)$. В случае евклидова пространства $h \to \infty$ и формулы становятся обычными.

Все рассуждения дословно могут быть перенесены на n-мерное пространство. Н. И. Кованцов

6066. **Поверхности, на которых геодезические однопараметрического семейства являются винтовыми линиями на цилиндрах, ортогональных фиксированному направлению. Минео** (Superficie delle quali una semplice infinità di geodetiche sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa. Mineo Socio Corradino), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur., 1954, 16, № 2, 165—170 (итал.)

Пользуясь системой географических координат (φ, ω) на поверхности, автор сводит указанную задачу к следующей: определить поверхность S, на которой семейство линий равных долгот $\omega =$ const относительно некоторого направления было бы семейством геодезических.

Искомые поверхности определяются заданием третьей и второй основных форм, коэффициенты последней из которых удовлетворяют уравнениям Петерсона — Кодацци и сформулированному условию. Из этих трех уравнений находятся коэффициенты D, D', D'', причем каждый из случаев $D = 0$, $D' = 0$, не входящих в общее решение, рассматривается особо.

Затем при помощи общих уравнений теории поверхностей, отнесенной к географическим координатам, находятся уравнения искомых поверхностей.

В особом случае $D = 0$ каждая геодезическая совпадает с образующей соответственного цилиндра. Случай $D' = 0$ (в тексте статьи — опечатка: $D = 0$) отвечает поверхностям Монжа, когда геодезические пересекают ортогонально образующие соответственного цилиндра. Г. С. Бархин

6067. **Омбилические точки и W-поверхности. Хартман, Винтнер** (Umbilical points and W-surfaces. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1954, 76, № 3, 502—508 (англ.)

Поверхность, на которой $F(K, H) = 0$, где K и H — гауссова и средняя кривизны, называется специальной W-поверхностью, если функция $F(K, H)$ определена, и класса C^2 на той части плоскости (K, H), где $K \leqslant H^2$ и $\frac{1}{2}F_H + HF_K \neq 0$ при $K = H^2$.

Если S (малый кусок) — специальная W-поверхность класса C^2 и не является плоскостью или сферой, то омбилические точки S (если они существуют) изолированы и их индексы отрицательны (индекс характеризует поведение главных направлений в окрестности точки. См. H. Hopf, H. Samelson, Math. Z., 1938, 43, 749—766). Отсюда следует: замкнутая ориентируемая поверхность S рода нуль класса C^2 есть сфера. Авторы замечают, что это следствие было доказано Черном в предположении, что гауссова кривизна K поверхности S положительна (Chern S. S., Duke Math. J., 1945, 12, 279—290), а также А. В. Погореловым (Докл. АН СССР, 1948, 62, 297—299) при более сильном ограничении на дифференцируемость F и S и А. Д. Александровым (Докл. АН СССР, 1939, 22, 99—102) при предположении аналитичности F и S. И. Н. Григорьев

6068. **Об одном классе цилиндрических конгруэнций. Сабан** (On a class of cylindrical congruences. Saban Giacomo), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 248—249 (англ.)

Уравнение «p-конгруэнции», т. е. цилиндрической конгруэнции, цилиндры которой вырождаются в плоскости, может быть записано в виде:

$$\mathbf{R}(s, t) = \mathbf{G}(s) - \varepsilon t\,[\sin\varphi(s)\,\mathbf{N}(s) + \cos\varphi(s)\,\mathbf{T}(s)], \quad \varepsilon^2 = 0,$$

где $\mathbf{G}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{T}$ — дуальные единичные векторы ортогонального репера нецилиндрической линейчатой поверхности, принадлежащей конгруэнции ($\mathbf{G}$ направлен по образующей, $\mathbf{N}$ — по нормали в горловой точке). Конгруэнции, для которых $\sin\varphi(s) = 0$, характеризуются тем, что лучи фокального торса являются лучами конгруэнции, а также тем, что они являются изотропными цилиндрическими конгруэнциями. Конгруэнции, для которых $\cos\varphi(s) = 0$, суть известные синектические конгруэнции. Р. Н. Щербаков

6069. **О сетях общих винтовых линий с общим направляющим конусом на некоторых поверхностях. Лагранж** (Sur les réseaux d'hélices de même cône directeur tracés sur certaines surfaces. Lagrange René), Bull. sci. math., 1954, 78, 50—80 (франц.)

Ищутся поверхности, обладающие сетью общих винтовых линий (линий откоса) с заданным направляющим конусом, которая сопряжена с ее фундаментальной сетью (линий нулевой длины, асимптотической или сетью линий кривизны).

В первой части статьи подготовляется аппарат исследования, введены некоторые тензоры трехмерного пространства, инвариантно связанные с заданной в нем поверхностью.

В предположении, что поверхность S отнесена к ортонормальному реперу $\mathbf{e}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) с началом O и криволинейными координатами u^i ($i = 1, 2$), имеет место: $\overline{OM} = \Sigma_\alpha x^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, где x^α — декартовы координаты точки M поверхности, заданные как функции от u^i. Если $\Phi = \Sigma_{ij}\varphi_{ij}\,du^i\,du^j$ — произвольная квадратичная форма, то

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{g}\left[\varphi_{22}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^1}\frac{\partial x}{\partial u^2} - \varphi_{12}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^1}\frac{\partial x^\beta}{\partial u^2} + \frac{\partial x^\beta}{\partial u^2}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^1}\right) + \varphi_{11}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^2}\frac{\partial x^\beta}{\partial u^2}\right],$$

где g — дискриминант метрического тензора g_{ij} поверхности, представляет собою инвариант по отношению к замене переменных u^i.

Принимая за Φ три основные квадратичные формы поверхности, автор получает три тензора типа $Q_{\alpha\beta}$, определенных поверхностью. С другой стороны, каждый тензор $Q_{\alpha\beta}$ уравнением

$$\sum_{\varkappa,\,\beta} Q_{\varkappa\beta}x^\alpha x^\beta = \frac{h}{2}\sum_{ij} g^{ij}\varphi_{ij}$$

определяет семейство поверхностей второго порядка, которые оказываются цилиндрами. При сопряженности сети линий откоса какой-либо другой сети на S, цилиндры соответствующего этой сети семейства имеют общую точку, фиксируемую заданием направляющего конуса первой сети. С помощью развитого таким образом аппарата автор находит поверхности, допускающие одну или несколько сопряженных сетей линий откоса с непараллельными осями направляющих конусов.

Я. Л. Шапиро

6070. Конические сети. Бланк Я. П., Уч. зап. Харьк. ун-та, **40**, Записки матем. отд. физ.-мат. фак. и Харьк. матем. о-ва, 1952, **23**, 113—141 (Журнал вышел из печати в 1954 г.)

Определены все поверхности, несущие ∞' конических сетей. Конической сетью называется сопряженная сеть, образованная линиями касания описанных около поверхности конусов. Поверхности второго порядка несут ∞^4 конических сетей и это свойство характеризует их. Поверхностей с трехпараметрическим множеством конических сетей не существует. Поверхности, обладающие ∞^2 конических сетей, являются линейчатыми поверхностями, принадлежащими линейной конгруэнции; уравнения их получены. Поверхности с однопараметрическим множеством конических сетей есть прежде всего поверхности переноса, найденные Ли и Рейдемейстером. Кроме того, существуют только: 1) поверхности третьего порядка с четырьмя коническими точками, 2) поверхности с двумя коническими точками и одной бипланарной, которая получается от слияния двух конических, 3) поверхности с одной конической точкой и одной бипланарной, которая получается от слияния трех конических. В. И. Коровин

6071. К проблеме Н. Г. Чеботарева об обобщенных поверхностях переноса. Бланк Я. П., Уч. зап. Харьк. ун-та, 1952, **40**, Записки матем. отд. физ.-мат. фак. и Харьк. матем. о-ва, **23**, 103—112 (Журнал вышел из печати в 1954 г.)

Н. Г. Чеботарев дал обобщение поверхностей переноса (Матем сб., 1952, **34**, 149—206). Обобщенными поверхностями переноса называются поверхности, которые несут семейства кривых, переходящих друг в дру посредством преобразований заданной группы G (мейства импримитивности). При этом, если группа не коммутативна, то линии импримитивности не мог меняться ролями с траекториями их точек. Он же док зал, что обобщенная поверхность переноса может име или континуум систем импримитивности или не бол четырех.

Неизвестно, существуют ли обобщенные поверхн сти переноса, имеющие четыре системы импримити ности или континуум таких систем. Примером обобще ной поверхности переноса может служить поверхност сдвига эллиптического пространства. Последней назы вается поверхность, допускающая каноническое пре ставление вида $X = Y(u)Z(v)$, где Y и Z — кватерни ны, а X — кватернион, компоненты которого служа координатами поверхности, причем сеть (u, v) — сет сдвига.

Данная работа имеет целью на примере поверхно стей сдвига эллиптического пространства выяснить существуют ли поверхности, несущие континуум сете сдвига. Результат: единственными поверхностями, и которых имеется континуум сетей сдвига, служат ли нейчатые поверхности с образующими — параллеля ми Клиффорда (цилиндрические поверхности эллип тического пространства).

Примененный при решении этого вопроса метод дае возможность получить и поверхности обычного про странства, имеющие ∞ сетей переноса. Это будут параболоиды, линейчатые поверхности переноса (ге ликоиды и поверхность Клейна) и поверхность, опреде ляемая уравнением $e^x + e^y + e^z = 1$ (с точностью до аффинного преобразования). М. В. Потоцкий

6072. Об особых поверхностях. Декёйпер (Sur des surfaces particulières. Decuyper Marcel), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 208 (франц.)

Краткое сообщение о поверхностях, у которых асимптотические обоих семейств принадлежат линейным комплексам. Такие поверхности вполне характеризуются тем свойством, что диагонали четырехсторонника Демулена каждой из них пересекают их директрисы Вильчинского в фокусах, описываемых этими директрисами конгруэнций. Фокус каждой из указанных конгруэнций располагается в фокальной плоскости другой конгруэнции. Эти конгруэнции образуют расслояемую сопряженную пару, причем оба семейства поверхностей расслоения принадлежат к тому же типу поверхностей, что и исходная поверхность, имея те же самые директрисы Вильчинского и те же самые четырехсторонники Демулена. Н. И. Кованцов

6073. О присоединенной к поверхности последовательности Лапласа, три точки которой принадлежат гиперквадрике Клейна. Годо (Sur la suite de Laplace associée à une surface et dont trois points appartiennent a l'hyperquadrique de Klein. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1953, **39**, № 10, 788—797 (франц.)

В проективном пространстве S_3 рассматривается поверхность (x), отнесенная к асимптотическим линиям u, v. Каждой прямой пространства S_3 соответствует точка в пятимерном пространстве S_5 на гиперквадрике Клейна Q. Если обозначить через U и V изображение в S_5 касательных в точке x к линиям u, v, то пучку касательных в точке x к поверхности (x) в S_3 соответствует в S_5 прямая UV на Q. При изменении u, v эта прямая описывает квадратичную конгруэнцию. U и V являются фокусами луча UV. Конгруэнция (UV) порождает в S_5 последовательность Лапласа

$$\ldots, U_m, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots, \quad (1)$$

каждая точка которой есть преобразование Лапласа предыдущей по u.

Изучаются такие поверхности (x) в S_3 и связанные с ними в S_5 такие последовательности (1), что точка $U_n\ (n>1)$ принадлежит Q.

В этом случае одно семейство прямолинейных образующих поверхности 2-го порядка Φ_{n-1} представляет собой 2 плоских пучка прямых $(S_1\sigma_1)$ и $(S_2\sigma_2)$, а второе — 2 плоских пучка $(S_1\sigma_2)$ и $(S_2\sigma_1)$, где S_1 и S_2 — вершины пучков, а σ_1 и σ_2 — их плоскости. При этом прямая изображена точкой U_n на Q.

Последовательность (1) вписана сама в себя в том смысле, что точка U_{n+i} принадлежит плоскости $V_{n-i-1}V_{n-i}V_{n-i+1}$, где i — любое целое положительное или отрицательное число, при этом вместо точек $U_{-\alpha-1}$ и $V_{-\alpha-1}$ берут соответственно точки V_α и U_α.

Одно семейство прямолинейных образующих Φ_{n+i}, представленное в S_5 сечением Q плоскостью $U_{n+i}U_{n+i+1}U_{n+i+2}$, принадлежит линейному комплексу, представленному в S_5 точкой U_{n-i-1}, а второе семейство принадлежит линейному комплексу, изображенному в S_5 точкой U_{3n+i+2}. Т. А. Шульман

6074. К теории трехпараметрического комплекса окружностей. Гейдельман Р. М., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 2, 201—204

В трехмерном конформном пространстве рассматривается семейство окружностей, зависящее от трех параметров — комплекс окружностей. С каждой окружностью комплекса связывается конформный репер, состоящий из трех взаимно ортогональных сфер и двух точек пересечения этих сфер. Две из этих сфер проходят через окружность комплекса. Фокальные свойства комплекса окружностей позволяют канонизировать репер; при этом устанавливается система уравнений Пфаффа, связывающая компоненты инфинитезимального перемещения репера и определяющая комплекс окружностей. Накладывая различные условия на коэффициенты этой системы уравнений и системы, являющейся ее дифференциальным продолжением, автор получает целый ряд различных типов комплексов окружностей, определяет произвол существования каждого типа и дает его геометрическую характеристику. М. А. Акивис

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

6075. Кривая в аффинном пространстве и ее аффинная дуга. Божичка (Křivka v afinním prostoru a její afinní oblouk. Nožička Frant), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 4, 307—339 (чеш.)

Строится теория кривых в пространстве аффинной связности без кручения (называемом автором «аффинным пространством»). Определяется класс кривой, не зависящий от выбора координат и параметра кривой, «аффинная дуга» — привилегированный параметр кривой, аналоги кривизн кривой — коэффициенты разложения ковариантных производных координат по таким же производным предыдущих порядков и т. д. Построенная теория применяется к кривым на обычной аффинной («аффинно-евклидовой») плоскости, где строятся аналоги формул Френе и определяются соприкасающиеся конические сечения для кривых второго класса. Б. А. Розенфельд

6076. Гиперлинии Дарбу, помещенные в римановo пространство. Прванович (Hyperlignes de Darboux appartenant a l'espace Riemannien. Prvanovitch Mileva), Bull. sci. math., 1954, 78, 89—97 (франц.)

В римановом пространстве V_m с положительной метрикой задано подпространство V_n и система $m-n$ конгруэнций кривых, имеющих в точках пересечения с подпространством V_n единичные касательные векторы с компонентами $\lambda^\alpha_{\tau|}$. Автор определяет гиперлинии Дарбу в пространстве V_n относительно рассматриваемой конгруэнции следующим условием:

$$\lambda^\alpha_{\tau|}=a\left(R_1t^\alpha_{1|}+\frac{dR_1}{ds}R_2t^\alpha_{2|}\right)+b\frac{dy^\alpha}{ds}\begin{pmatrix}\alpha,\beta=1,2,\dots,m\\ \tau=n+1,\dots,m\end{pmatrix},$$

где $t^\alpha_{1|}$, $t^\alpha_{2|}$ — компоненты единичных векторов первой и второй нормали, а R_1, R_2 — радиусы первой и второй кривизны линии.

В случае, когда векторы $\lambda^\alpha_{\tau|}$ образуют ортогональную систему векторов, нормальных к V_n, гиперлинии Дарбу становятся линиями Дарбу. Л. Е. Евтушик

6077. О сетях в трехмерном пространстве. Хаймович (Consideraţiuni asupra reţelelor intr' un spaţiu cu trei dimensiuni. Haimovici Adolf), Studii şi cercetări ştiinţ., 1953, 4, № 1—4, 29—52 (рум.; резюме русс., франц.)

В римановом 3-пространстве с метрическим тензором g_{ij} сеть рассматривается как состоящая из трех двупараметрических семейств кривых — линий тока трех полей направлений, образующих в каждой точке трехгранный угол (T). Сеть задается тензором φ_{ijk} из уравнения

$$\varphi_{ijk}x^ix^jx^k=0 \qquad (1)$$

(x^i — декартовы координаты точки в локальном касательном пространстве), получаемого перемножением нормальных уравнений трех граней угла T. Среди контравариантных тензоров τ^{ijs}, взаимных с φ_{ijk} в смысле равенства $\varphi_{ijk}\tau^{ijs}=2\delta^s_k$, выделяется один, обозначаемый через $\tilde{\varphi}^{ijk}$. Вводя еще в рассмотрение дискриминантные тензоры ε_{ijk} (компоненты 0 и $\pm\sqrt{g}$, где $g=\det g_{ik}$), ε^{ijk} (компоненты 0 и $\pm 1:\sqrt{g}$) и руководствуясь формальной аналогией с теорией плоских кривых третьего порядка (то же уравнение (1), где теперь x^i — однородные координаты точки на плоскости), автор строит алгебраические инварианты I_1, I_2, I_3 (или вместо них J_1, J_2, J_3), связанные с двугранными углами трехгранника T. С помощью этих инвариантов легко записываются условия, характеризующие сеть, у которой в каждой точке один, или два, или три из упомянутых углов — прямые. Среди дифференциальных комитантов тензора φ_{ijk} существенную роль играет $\chi^k_{ij}=\varphi_{ijb,c}\tilde{\varphi}^{kbc}$, участвующий в «теореме приведения»: все ковариантные производные тензора φ_{ijk} могут быть выражены через тензоры g_{ij}, φ_{ijk}, χ^k_{ij}, инварианты I_1, I_2, I_3 и их ковариантные производные. Рассматриваются трехиндексные символы $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{smallmatrix}\right)$, родственные «коэффициентам вращения», введенным Риччи для n-ортогональных семейств кривых в n-пространстве (здесь $n=3$, требование ортогональности опускается) и выясняется геометрический смысл этих символов. Чтение несколько затрудняется наличием опечаток, а также не всегда оговариваемым применением повторяющихся индексов не в качестве индексов суммирования. Я. С. Дубнов

6078. Соприкасающиеся римановы пространства регулярных картановых пространств. Мор (Die

...skularen Riemannschen Räume regulärer Cartanscher Räume. Moór Arthur), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, 5, № 1—2, 59—72 (нем.; резюме русс.)

Рассматривается картаново пространство, являющееся многообразием гиперповерхностных элементов $(x^1, \ldots, x^n, u_1, \ldots, u_n)$, в котором определен элемент площади гиперповерхности

$$dV = \frac{F(x, u)}{u_n}\, dx^1 \ldots dx^{n-1},$$

где $F(x, u)$ — положительная однородная функция первого измерения относительно $u_1, \ldots, u_n$. В этом пространстве определяется метрический тензор

$$g^{ik}(x, u) = \mathfrak{A} \frac{-\frac{1}{n-1}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{2}F^2\right)}{\partial u_i \partial u_k}}{\ldots},$$

где

$$\mathfrak{A} = \det\left|\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial u_i \partial u_k}\right|.$$

Далее рассматривается однопараметрическое многообразие гиперповерхностных элементов

$$x^i = x^i(v), \quad u_i = u_i(v). \tag{2,1}$$

Через каждый такой элемент проводится гиперплоскость. Если получается однослойное покрытие некоторой области $\mathfrak{B}$, то каждой точке x этой области можно сопоставить гиперповерхностный элемент $u_i(x)$. Соприкасающееся римманово пространство вдоль (2.1) определяется в области $\mathfrak{B}$ метрическим тензором

$$\gamma_{ik} = g_{ik}[x, u(x)].$$

Доказывается, что вдоль (2.1) инвариантный дифференциал вектора в картановом и соприкасающемся римановом пространствах совпадают. Устанавливается связь между тензорами кривизны этих пространств.

Г. Ф. Лаптев

6079. К теории вложения поверхностей в многомерном евклидовом пространстве. Яненко Н. Н., Тр. Моск. матем. о-ва, 1954, 3, 89—180

Изучаются классы изгибаемых трижды непрерывно дифференцируемых поверхностей V_m в евклидовом пространстве E_{m+q} и изгибание (изометрическое отображение поверхностей V_m на поверхность $\overline{V}_m$; символ $V_m \sim \overline{V}_m$) называется сонзгибанием, если изгибание $V_m \sim \overline{V}_m$ индуцируется изгибанием вмещающей поверхности высшей размерности:

$$V_{m-\sigma} \sim \overline{V}_{m-\sigma},\ V_m \subset V_{m-\sigma},\ \overline{V}_m \subset \overline{V}_{m-\sigma}.$$

в противном случае — собственным изгибанием. В работе изучаются только собственно изгибаемые поверхности.

Если ω_α^β — компоненты перемещения репера $\{I_\alpha\}$ поверхности V_m, где первые m векторов репера касательны к V_m, а последние q — единичны, ортогональны между собой и нормальны к поверхности, то при $V_m \sim \overline{V}_m$ в соответствующих точках этих поверхностей реперы $\{I_\alpha\}$ и $\{\overline{I}_\alpha\}$ могут быть выбраны так, что

$$\omega^i = \overline{\omega}^i,\ \omega_i^j = \overline{\omega}_i^j \quad (i, j = 1, \ldots, m).$$

При этом совместный ранг смешанных форм ω_i^{m+s}, $\overline{\omega}_i^{m+s}$ $(s = 1, \ldots, q)$ не превосходит $2q$. Отсюда тип (РЖМат, 1953, 432) собственно изгибаемой поверхности не превосходит 2.

Так как тип поверхности не превосходит типа включающей поверхности, то поверхности типа $t > 2$ неизгибаемы (Allendörfer C. B., J. Math., 1939, 61, № 3, 633—644).

Поверхность $V_m \subset E_{m+q}$, допускающая собственное изгибание, имеет ранг $r \leqslant 2q$ и, значит, расслаивается на ∞^r плоскостей E_{m-r} (образующих); образующие E_{m-r} являются элементами конгруэнтности, т. е. при изгибании $V_m \sim \overline{V}_m$ переходят в конгруэнтные $\overline{V}_{m-r}$. Если собственное изгибание $V_{m+\sigma} \sim \overline{V}_{m+\sigma}$ индуцирует сонзгибание $V_m \sim \overline{V}_m$, то $V_{m+\sigma}$ расслаивается на ∞^r плоских образующих — элементов конгруэнтности $E_{m+\sigma-r}$ $(r \leqslant 2q - 2\sigma)$. Каждому $E_{m+\sigma-r}$ принадлежит $V_{m-r} \subset V_m$, причем $\overline{V}_{m-r}$ также является элементом конгруэнтности.

Такая поверхность V_m допускает расслоение на ∞^r элементов конгруэнтности V_{m-r} класса σ $(r \leqslant 2q - 2\sigma)$.

Если V_m имеет ранг $\rho \leqslant m$ и, значит, расслаивается на ∞^{ρ} подпространств $E_{m-\rho}$ и E_ρ есть плоскость, дополнительная к $E_{m-\rho}$ $(E_\rho + E_{m-\rho} = E_m$, где E_m — касательная плоскость к $V_m)$, то плоскость $E_p \subset E_\rho$ называется фокальной, если при смещении $dr \subset E_p$ плоская образующая $E_{m-\rho}$ переходит в плоскую образующую $\overline{E}_{m-\rho}$ так, что $E_{m-\rho} \cap \overline{E}_{m-\rho} = E_{m-\rho-p}$. Собственно изгибаемая поверхность всегда имеет фокальные плоскости. Иначе: радиус-вектор r собственно изгибаемой поверхности удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{\alpha i}^i \frac{\partial r}{\partial u^i} + \Gamma_{\alpha i}^\beta \frac{\partial r}{\partial u^\beta};$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^\beta} = 0 \ (i = 1, \ldots, \rho;\ \alpha, \beta = \rho + 1, \ldots, m;\ \rho \leqslant 2q),$$

где Γ_{jk}^i — коэффициенты связности метрики.

Если собственно изгибаемая поверхность имеет конечное число фокальных плоскостей, то касательные к поверхности гиперплоскости удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial^2 \pi_s}{\partial u^i \partial u^j} = \alpha_{sij} \frac{\partial \pi_s}{\partial u^i} + \alpha_{sji} \frac{\partial \pi_s}{\partial u^j} + \gamma_{sij}^t \pi_t \quad (i \neq j).$$

$$\left|\frac{\partial \pi_s}{\partial u^i}\right| \varkappa_i^s = \left|\frac{\partial \pi_t}{\partial u^i}\right| \varkappa_i^t + k_{sti}^\tau \pi_\tau (s, t, \tau = 1, \ldots, q;$$

$i, j = 1, \ldots, \rho$, где $\alpha_{sij}, \gamma_{sij}^t = \gamma_{sji}^t, k_{sti}^\tau$ — функции параметров $u^1, \ldots, u^\rho$.

Далее рассматриваются поверхности общего положения типа 2 с конечным числом фокальных плоскостей, т. е. поверхности ранга $2q$, коэффициенты λ_i^j которой удовлетворяют условию:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \ldots & \lambda_1^q \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_q^1 & \ldots & \lambda_q^q \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sum_{i_1 j_1} \cdots \sum_{i_1 j_{q-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i_{q-1} j_1} \cdots \sum_{i_{q-1} j_{q-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_q;\ i_s = 1, \ldots, 2q),$$

где $\sum_{ij} = \sum_{s=1}^{q} \lambda_i^s \lambda_j^s$, $\omega_i^{m+s} = \lambda_i^s du^i$ в голономном фокальном репере; репер фокальный, если

$$\omega_\alpha^i = a_{\alpha i}^i \omega^i \ (i = 1, \ldots, \rho;\ \alpha = \rho + 1, \ldots, m).$$

Для этих поверхностей установлены необходимые и достаточные условия непрерывного изгибания; изгибание может быть только собственным. Если такая поверхность имеет две изометричных ей поверхности, не конгруэнтные с ней и между собой, то она допускает непрерывное изгибание.

Аналогично трехмерному случаю вводится понятие бесконечно малого изгибания поверхности. Поверхность, допускающая нетривиальное бесконечно малое изгибание (т. е. не являющееся бесконечно малым движением), называется нежесткой. Поверхность называется дискретно изгибаемой, если она допускает изгибание только на конечное число неконгруэнтных поверхностей.

Проективное преобразование нежесткой поверхности — тоже нежесткая поверхность.

Если поверхность V_m общего положения с невырожденным фокальным репером нежесткая и изометрична поверхности $\overline{V}_m \not\equiv V_m$, то V_m допускает непрерывное изгибание.

Поверхность V_m, нежесткая или непрерывно изгибаемая, аппроксимируется дискретно изгибаемыми поверхностями. Это утверждение доказано для поверхностей с конечным числом фокальных плоскостей. Автор высказывает предположение, что оно справедливо и в общем случае.

Ряд установленных в работе предложений носит проективно-инвариантный характер. Это обусловлено тем, что инварианты поверхности — ранг и тип, определяющие характер вложения поверхности, являются же проективными инвариантами.

В первой (алгебраической) части работы (§§ 1—4) автор исследует системы скалярных произведений, системы линейных дифференциальных форм и пучки аффиноров, встречающиеся во второй части. Эта часть представляет и самостоятельный интерес. В. Т. Базылев

6080. **О специальном классе пространств A_n.** Хантьес (On a special class of spaces A_n. Haantjes J.), Nieuw arch. wiskunde, 1954, 2, № 2—3, 97—102 (англ.)

Изучаются пространства симметричной линейной аффинной связности A_n, в которых существует конгруэнция кривых такая, что любое X_2, образованное кривыми конгруэнции, пересекающими некоторую геодезическую A_n, является вполне геодезическим.

Примерами таких пространств являются общее $(n-1)$-мерное пространство проективной связности без кручения H_{n-1}, если в нем однородные координаты рассматривать как неоднородные координаты в A_n, и субпроективное пространство.

Найдены необходимые и достаточные условия для каждого из следующих свойств: 1) A_n обладает указанным свойством по отношению к конгруэнции, заданной векторным полем v^i; 2) вполне геодезические X_2 являются плоскими; 3) в многообразии H_{n-1} кривых конгруэнции индуцируется проективная связность.

В заключение доказывается теорема: A_n $(n > 3)$ является субпроективным тогда и только тогда, когда аффинор кривизны имеет вид

$$R_{kji}^{\cdot\cdot h} = 2T_{[kj]} A_i^h - 2A_{[k}^h T_{j]i} + U_{kji}\, v^h$$

и вектор v^h является торсообразующим, т. е. удовлетворяет условию

$$\nabla_i v^h = \lambda A_i^h + p_i v^h.$$

Из этой теоремы непосредственно следует условие, полученное Адати и Схоутеном (РЖМат, 1954, 1796).

Следует отметить, что тензорная характеристика метрических субпроективных пространств была дана ранее П. К. Рашевским (Тр. Семинара по вектор. и тензорн. анализу Н.-и. ин-та матем. при МГУ, 1933, № 1, 126—142). Ю. Е. Пензов

6081. **К вопросу о понятии меры в геометрии Минковского.** Бартель (Zum Inhaltsbegriff in der Minkowskischen Geometrie. Barthel Woldemar), Math. Z., 1953, 58, № 4, 358—375 (нем.)

В n-мерном аффинном пространстве A_n задана центральная строго выпуклая гиперповерхность (сфера Минковского) $L(X) = 1$. Однородная первого измерения функция $L(X) \equiv L(X^1, X^2, \ldots, X^n)$ от аффинных координат X^i радиуса-вектора X принадлежит классу C'''. С ее помощью автор определяет меру $F^{(p)}(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ параллелотопа, заданного векторами A_i, используя известное предложение аффинной геометрии об «отношении мер» двух параллельных p-плоскостей и принимая меру тела, расположенного в заданной $\mathfrak{A}_p$, равной «отношению мер» этого тела и «масштабного тела», получаемого пересечением «сферы Минковского» с p-плоскостью, параллельной $\mathfrak{A}_p$ и проходящей через центр сферы. Мера, принятая автором, отличается от указанной множителем

$$\omega^{(p)} = \pi^{p/2} : \Gamma(p/2 + 1).$$

Устанавливаются свойства меры $F^{(p)}(A_1, A_2, \ldots, A_p)$, аналогичные свойствам меры параллелотопа в евклидовом пространстве. Частный случай $p = 1$ приводит к мере $F^{(1)}(A)$ вектора A, которая совпадает с «длиной» $L(A)$ вектора A в геометрии $\mathfrak{M}_n$ Минковского, создаваемой «сферой» $L(X) = 1$. Дальнейшее развитие основ аналитической и дифференциальной геометрии кривых и гиперповерхностей пространства $\mathfrak{M}_n$ проводится путем систематического использования понятия меры $F^{(p)}$. А. М. Лопшиц

6082. **Комплексное тензорное исчисление для кэлеровых многообразий.** Гарабедян, Спенсер (A complex tensor calculus for Kähler manifolds. Garabedian P. R., Spencer D. C.), Acta math., 1953, 89, № 3—4, 279—331 (англ.)

Изучено комплексное тензорное исчисление на комплексных многообразиях. Авторы вводят комплексные аналоги известных операторов Стокса и Брауера и устанавливают ряд соотношений между гармоническими и аналитическими формами. Значительное место занимает доказательство существования фундаментальной сингулярности типа Кодейра для действительных гармонических полей в случае произвольного риманова многообразия класса C^∞. Центральным вопросом в работе является исследование комплексной граничной задачи для конечного подмногообразия компактного кэлерова многообразия. А. В. Бицадзе

6083. О финслеровой мере угла. Голомб (On Finsler's measurement of an angle. Gołąb Stanisław), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1953, **24**, № 2, 78—84 (англ.)

Доказывается теорема:

Если индикатриса I (двумерного) пространства Финслера является замкнутой кривой и если евклидова мера угла — действительное число для равномерно малых и одинаково ориентированных углов, то I — выпуклая кривая (углы автор называет равномерно малыми, если их евклидова мера меньше некоторого положительного числа ω).

Доказательство проводится заменой пространства Финслера аппроксимирующим его пространством Минковского. На примерах показано, что предположения: 1) I — замкнутая кривая и 2) мера угла — действительное число для равномерно малых углов, существенны.

W. Ślebodziński

6084. Дифференциальные операторы в римановых пространствах. Аронштайн, Милграм (Differential operators on Riemannian manifolds. Aronszajn N., Milgram A. N.), Rend. circolo mat. Palermo, 1953, **2**, № 3, 266—325 (англ.)

Строится математический аппарат теории дифференциальных уравнений в частных производных в римановых пространствах. В первой части сообщаются необходимые сведения из тензорного анализа и римановой геометрии; во второй части определяются билинейные дифференциальные операторы в римановых пространствах, устанавливается существование и единственность сопряженного оператора, рассматриваются внешние дифференциальные формы; в третьей части рассматриваются различные виды граничных операторов.

Б. А. Розенфельд

6085. Специальная теорема Стокса для полных римановых многообразий. Гафни (A special Stokes's theorem for complete Riemannian manifolds. Gaffney Matthew P.), Ann. Math., 1954, **60**, № 1, 140—145 (англ.)

Пусть M — произвольное ориентируемое риманово многообразие (с метрикой класса C^2). Доказано, что если многообразие M полно, то для любой $(n-1)$-формы γ класса C^1, для которой интегралы $\int_M \gamma^* \gamma$ и $\int_M d\gamma^* d\gamma$ конечны, интеграл $\int_M d\gamma$ равен нулю.

М. М. Постников

6086. Приложение общего решения уравнений $g_{\mu\nu;\rho}=0$ к установлению одной специальной аффинной связности. Тонла (Application de la solution générale des équations $g_{\mu\nu;\rho}=0$ à la détermination d'une connexion affine particulière. Tonnelat Marie-Antoinette), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 3, 231—233 (франц.)

Для уравнения Эйнштейна $g_{\mu\nu;\rho}=0$ автором было найдено ранее (C. r. Acad. Sci., 1950, **230**, 182; J. phys. et radium, 1951, **12**, 81; 1952, **13**, 177) общее решение, позволяющее выразить аффинную связность через поле тензора $g_{\mu\nu}$. Это решение применяется в настоящей заметке к случаю сферической симметрии, причем автором рассмотрены как статический, так и нестатический случаи. Выражения для коэффициентов связности и условия существования решения в статическом случае совпадают, как отмечает автор, с результатами Боннора (Bonnor, Proc. Roy. Soc., 1952, **210**, 427). Нестатический случай представляет собой естественное обобщение. Этот просчет является испытанием действенности общего решения.

Б. Л. Лаптев

6087. Обобщенные римановы пространства и общая теория относительности. Эйзенхарт (Generalized Riemann spaces and general relativity. Eisenhart Luther P.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 6, 546—551 (англ.)

Рассматриваются обобщенные (по терминологии автора) римановы пространства, именно — n-мерные многообразия аффинной связности, в которых задается поле невырожденного ковариантного тензора второй валентности g_{ij}:

$$|g_{ij}| \neq 0 \ldots \quad (1)$$

Так же, как и в новой теории поля Эйнштейна, g_{ij} — несимметричный вообще тензор. Не касаясь возможности физического истолкования, автор для определенного выше пространства вводит перенесение и строит тензор кривизны. Обозначая через A_{ik} и $A_{[ik]}$ соответственно симметрическую и кососимметрическую части тензора A_{ik}, присоединенному тензору g_{ij} можно сопоставить g_{ij} и $g_{(ij)}$, причем из (1) следует существование тензора $g^{(ij)}$, однозначно определяемого соотношением $g_{i(j}g^{k)i} = \delta^k_j$, где δ^k_j — символы Кронекера. Вводится аналог символа Кристоффеля 1-го рода

$$\Delta_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}) \quad (2)$$

(здесь $g_{ik,j} = \partial g_{ik} / \partial x^j$) и символа 2-го рода

$$\Delta^h_{ij} = g^{hk}\Delta_{ijk}, \quad \Delta_{ijk} = g_{hk}\Delta^h_{ij}.$$

Как было показано автором ранее (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1951, **37**, 311), преобразование этих объектов при замене координат определяется соотношением

$$\Delta'^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{\partial x^h}{\partial x'^{\gamma}} = \Delta^h_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^j}{\partial x'^{\beta}} + \frac{\partial^2 x^h}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\beta}}. \quad (3)$$

Из (2) следует, что

$$\Delta_{(ij)k} \equiv \frac{1}{2}(\Delta_{ijk} - \Delta_{jik}) = \frac{1}{2}(g_{ji,k} + g_{kj,i} + g_{ik,j}), \quad (4)$$

$$\Delta_{i[jk]} \equiv \frac{1}{2}(\Delta_{ijk} + \Delta_{jik}) = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k});$$

$$\Delta^h_{(ij)} = g^{hk}\Delta_{(ij)k},$$

где последние два равенства определяют символы Кристоффеля для симметрического тензора $g_{(ij)}$. Из (3) следует, что $\Delta^h_{(ij)}$ есть тензор, причем

$$\Delta_i \equiv \Delta^j_{(ij)} = g^{jk}\Delta_{(ij)k} = g^{jk}\Delta_{(jk),i} = 0.$$

Рассматривая некоторый объект связности

$$\Gamma^h_{ij} = \Delta^h_{ij} + a^h_{ij}$$

и требуя, чтобы выполнялись условия

$$g_{ij,k} = g_{hj}\Gamma^h_{ik} + g_{ih}\Gamma^h_{kj},$$

можно показать, что тензор $a^h_{(ij)}$ удовлетворяет соотношениям, следствием которых будут равенства

$$\Gamma^h_{(ij)} = \frac{1}{3}\Delta^h_{(ij)}, \quad \Gamma^i \equiv \Gamma^j_{(ij)} = 0$$

и $\Gamma^h_{hk} = (\log w)_k$, где $w = \sqrt{-|g_{ij}|}$, т. е. получаем

обобщение известной формулы римановой геометрии. Из (4) следует, что объект

$$\Gamma^h_{ijk} \equiv \Gamma^h_{ij,k} - \Gamma^h_{ik,j} + \Gamma^e_{ij}\Gamma^h_{ek} - \Gamma^e_{ik}\Gamma^h_{ej}$$

является тензором и, следовательно, обобщает в некотором смысле тензор кривизны V_n. Свертывая этот тензор по индексам j, k, определим тензоры Γ_{ij}, $\underset{\vee}{\Gamma_{ij}}$, Γ_{ij}, первый из которых совпадает с тензором Эйнштейна, а третий (если он равен нулю) позволяет определить тензор Риччи R_{ij} (построенный для симметрического тензора g_{ij}) через тензор a^h_{ij} и его ковариантные производные относительно тензора g_{ij}.

А. З. Петров

6088. Некоторые результаты, вытекающие из новой фундаментальной группы преобразований в частной теории относительности и квантовой механике. Сибата (Some results deduced from the new fundamental group of transformations in special relativity and quantum mechanics. Shibata Takashi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **17**, № 1, 67—73 (англ.)

Автор исходит из полученных им в предыдущих статьях (J. Sci. Hiroshima Univ., 1952, **16**, № 1, 61—66; 1952, **16**, № 2, 285—290; 1952, **16**, № 3, 487—496) уравнений группы преобразований системы координат

$$x'^i = x^j\left[\delta^i_j - \frac{d^i - u^i/c}{1-(du)/c}d_j - d^i\left\{\frac{u_j/c}{\sqrt{1-(uu)/c^2}} - \frac{d_j\sqrt{1-(uu)/c^2}}{1-(du)/c}\right\}\right] +$$

$$+ t\left[d^i\frac{(uu)/c-(du)\{1-\sqrt{1-(uu)/c^2}\}}{\{1-(du)/c\}\sqrt{1-(uu)/c^2}} - \frac{u^i}{1-(du)/c}\right],$$

$$t' = [t-(ux)/c^2]/\sqrt{1-(uu)/c^2} \qquad (i,j=1,2,3),$$

которые, в отличие от уравнений группы Лоренца, не предполагают сферической симметрии рассматриваемых свойств. Этими уравнениями вводится некоторое выделенное направление d с направляющими косинусами d_j. Доказывается, что: 1. Аберрация света отсутствует, если направление распространения света параллельно выделенному направлению d, а направление наблюдения перпендикулярно к нему. 2. В предположении осевой симметрии рассматриваемых свойств направление оси симметрии должно совпадать с выделенным направлением d.

В заключение автор определяет импульс M^i и массу M частицы, движущейся со скоростью v, как инвариантный вектор вышеприведенной группы преобразований и находит для них, в предположении осевой симметрии, выражения

$$M^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1-(vv)/c^2}} + \frac{n\sqrt{1-(vv)/c^2}}{1-(dv)/c}cd^i,$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-(vv)/c^2}} + \frac{n\sqrt{1-(vv)/c^2}}{1-(dv)/c},$$

где m, n — произвольные постоянные.

Ф. И. Федоров

6089. Совместность уравнений унитарной теории поля Эйнштейна—Шредингера. Лихнерович (Compatibilité des équations de la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger. Lichnerowicz André), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 22, 1383—1386 (франц.)

Статья содержит анализ уравнений единой теории поля, предложенной Эйнштейном (РЖМат, 1954, 3450) и Шредингером (Schrödinger E., Proc. Roy. Irish Acad.; 1947, **51**, 163—171, 205; 1948, **52**, 1—6). В многообразии V_4 достаточно высокого класса рассматривается несимметрический тензор $g_{\alpha\beta}$ (греческие индексы пробегают значения 0,1,2,3) такой, что $g = |g_{\alpha\beta}| \neq 0$, $|g_{(\alpha\beta)}| \neq 0$ и отвечающая ему (несимметрическая) аффинная связность $L^\rho_{\alpha\beta}$:

$$\partial_\rho g_{\lambda\mu} - L^\sigma_{\lambda\rho}g_{\sigma\mu} - L^\sigma_{\mu\rho}g_{\lambda\sigma} = 0;$$

при этом тензор $g_{\alpha\beta}$ должен удовлетворять условию $\partial_{\rho}\mathfrak{g}^{[\rho\beta]} = 0$ (одинаковые латинские и готические буквы означают соответствующие друг другу тензоры и тензорные плотности, получаемые умножением тензора на $\sqrt{|g|}$), откуда следует $L^\rho_{\lambda\rho} = L^\rho_{\rho\lambda}$. Уравнения теории поля имеют вид

$$R_{[\alpha\beta]} = 0,\ R_{[\alpha\beta]} = \frac{2}{3}(\partial_\alpha\Gamma_\beta - \partial_\beta\Gamma_\alpha),$$

где $R_{\alpha\beta}$ — тензор Эйнштейна связности L и Γ_α — вектор; кроме того, имеет место «закон сохранения»:

$$\partial_\lambda(\mathfrak{K}^\lambda_\rho) + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}\partial_\rho\mathfrak{g}^{\alpha\beta} = 0,$$

где

$$K^\lambda_\rho = H^\lambda_\rho - \frac{1}{2}\delta^\lambda_\rho H^\tau_\tau,\ H^\lambda_\rho = R_{\rho\sigma}g^{\lambda\sigma} + R_{\sigma\rho}g^{\sigma\lambda}.$$

В работе рассматривается следующая задача Коши унитарной теории поля: на поверхности $S(x^0=0, \mathfrak{g}^{00}\neq 0)$ задаются величины g_{ij}, $\mathfrak{g}^{[0i]}$, $\mathfrak{g}^{(0\lambda)}$, $\partial_0 g_{ij}$, $\partial_0\mathfrak{g}^{[0i]}$, $\partial_0\mathfrak{g}^{(0\lambda)}$ Γ_i, Γ_0 (латинские индексы пробегают значения 1,2,3), удовлетворяющие условиям, вытекающим из уравнений теории поля; требуется определить $g_{\alpha\beta}$ и $L^\rho_{\alpha\beta}$ во всем пространстве. Доказывается, что за исключением особого случая, указанного Главатым (РЖМат, 1955, 1466), эта задача допускает единственное решение.

И. М. Яглом

6090. Статические сферически-симметричные пространства-времена в общей теории относительности. Такено (Static spherically symmetric space-times in general relativity. Takeno Hyôitirô), Progr. Theoret. Phys., 1953, **10**, № 5, 509—517 (англ.)

Обычно в общей теории относительности гравитационное поле называется статическим, если коэффициенты линейного элемента не зависят от времени. Автор отмечает, что такое определение относится к внешнему виду линейного элемента в данной координатной системе и не отражает никакого внутреннего свойства пространства-времени. Предлагается называть сферически-симметричный линейный элемент статическим, если его можно преобразовать к виду

$$ds^2 = -A(r)\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + C(r)\,dt^2.$$

Применяя развитую автором общую теорию сферически-симметричных пространств (РЖМат, 1954, 3448), условие статичности можно выразить в инвариантном виде уравнениями $\rho^4 = \rho^4(\lambda)$, $\rho^3 = \rho^3(\lambda)$, где ρ^k, λ являются внутренними инвариантами сферически-симметричной квадратичной формы. Эти инварианты можно вычислить по заданным коэффициентам g_{ik} и таким образом решить, является ли данный сферически-

симметричный линейный элемент статическим или нет.

С точки зрения применения в общей теории относительности среди сферически-симметричных статических пространств особого внимания заслуживают пространства S_p и S_q, характеризуемые соответственно линейными элементами:

$$ds^2 = -A(r)\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + A^{-1}\,dt^2$$

и

$$ds^2 = -A(r)\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + dt^2,$$

или соотношениями $\rho^2 = \rho^3$ и соответственно $\rho^4 = \rho^4(\lambda)$, $\rho^3 + 2\rho^4 = 0$ между внутренними инвариантами. Например, линейные элементы де Ситтера ($\rho^1 = \rho^2 = \rho^3 = 0$, $\rho^4 = -2k^2$) и Шварцшильда ($\rho^1 = -2\rho^2 = -2\rho^3 = 6\rho^4 = -24\,m\lambda^{-3}$) — типа S_p, линейный элемент Эйнштейна ($\rho^1 = \rho^2 = 0$, $\rho^3 = -2\rho^4 = 4/R^2$) — типа S_q. Показывается, что линейный элемент релятивистской космологии

$$ds^2 = -e^{2g(t)}(1+r^2/4R^2)^{-2}(dr^2+r^2\,d\theta+r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2)+dt^2,$$

обладающей свойством статичности, с необходимостью совпадает с линейным элементом де Ситтера или Эйнштейна или преобразуется к виду

$$ds^2 = -dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + dt^2.$$

Х. П. Керес

6091 К. **Специальная и общая теории относительности. Относительность и проблема пространства. Эйнштейн** (La théorie de la relativité restreinte et générale. La relativité et le problème de l'espace. Einstein Albert, Paris, Gauthier-Villars EditeurImprimeur-Libraire, 1954, 180 p., 1.300 fr.) (франц.)

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

6092. **О некоторых формулах для объема и площади поверхности. Курита** (On some formulas about volume and surface area. Kurita Minoru), Nagoya Math. J., 1953, 6, Oct., 109—117 (англ.)

Пусть M — тело в n-мерном евклидовом пространстве и P_t — такое однопараметрическое непрерывно дифференцируемое семейство гиперплоскостей, что через каждую точку M проходит одна и только одна гиперплоскость из P_t. Предполагая, что геометрическим местом центров тяжести сечений M плоскостями P_t является гладкая относительно t кривая L, автор доказывает формулу

$$V = \int v\,d\sigma, \qquad (1)$$

где V — объем тела M, v — $(n-1)$-мерный объем сечения, $d\sigma$ — составляющая элемента дуги L по нормали к сечению.

В частности, для трубки, ограниченной ортогональными траекториями семейства P_t и двумя гиперплоскостями этого семейства (при условии, что никакие две гиперплоскости не пересекаются внутри трубки), справедлива формула

$$V = vl, \qquad (2)$$

где l — длина кривой L. Формула (2) является обобщением известной формулы Гульдина.

В качестве обобщения формулы Гульдина для площади поверхности вращения приводится формула $S = sl$, где S — площадь поверхности трубки (в смысле, указанном выше), s — $(n-2)$-мерная площадь сечения. Формулы (1) и (2) обобщаются на случай сферического пространства.

В предположении, что положение точки A_0 относительно треугольника $A_1A_2A_3$ фиксировано и движение двупараметрично, доказывается тождество

$$\sum_{i=0}^{i=3} S_i\,\sigma_i = 0,$$

где S_i — ориентированная площадь фигуры, заполняемой точкой A_i, σ_i — ориентированная площадь треугольника, среди вершин которого нет A_i.

Автор получает перечисленные результаты применением метода подвижного репера и именно в этом применении, а не в результатах усматривает интерес своей работы. Г. И. Дринфель

6093. **О плотных упаковках шаров в пространствах постоянной кривизны. Фейеш-Тот** (On close packings of spheres in spaces of constant curvature Fejes Tóth L.), Publs mathematicae, 1953, 3, № 1—2, 158—167 (англ.)

Следуя аналогии с двумерным случаем, автор высказывает следующее предположение. Пусть в трехмерном пространстве постоянной кривизны k размещено не менее 4 неналегающих шаров радиуса r, тогда пространство можно разбить на тетраэдры, в каждом из которых плотность заполнения (т. е. отношение объема части, заполненной шарами, к объему всего тетраэдра) будет не больше, чем плотность $\delta(kr^2)$ заполнения тетраэдра, образованного центрами 4 взаимно касающихся шаров радиуса r. При размещениях центров касающихся друг друга шаров в вершинах известных правильных разбиений пространств постоянной кривизны получаются плотнейшие упаковки. Предельному значению $kr^2 \to -\infty$ соответствует правильное заполнение пространства Лобачевского орисферами, каждая из которых касается бесконечного числа других; в этом случае достигается, повидимому, наибольшая плотность $\approx 0{,}853$.

Автор подкрепляет это двумя результатами. Во-первых, дается оценка сверху для числа неналегающих равных шаров, касающихся шара того же размера; для упомянутых случаев плотной укладки эта оценка является точной. Во-вторых, устанавливается нижняя граница объема выпуклого n-гранника, содержащего данную сферу; она точна для случаев описанного тетраэдра, куба и додекаэдра. Доказательства основаны на содержащейся в книге Ф. Тота (РЖМат. 1954, 2910К) интегральной оценке сферического расстояния различных точек сферы до ближайшей из n фиксированных на ней точек.

Специально исследуется правильное расположение, получаемое в трехмерном пространстве, представляющем собой границу 4-мерного евклидова шара, если центры шаров размещать в вершинах вписанного в 4-мерный шар правильного 600-гранника. В этом случае каждый из шаров касается 12 других; плотность упаковки $\approx 0{,}774$. Повидимому, это максимум плотности для заполнения не менее чем 3 равными шарами пространства неотрицательной кривизны. Указанное расположение реализует по меньшей мере локальный максимум плотности заполнения сферического пространства 120 равным шарами.

В. А. Залгаллер

6094. **Минимальные множества видимости. Валентайн** (Minimal sets of visibility. Valentine F. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 6, 917—921 (англ.)

Подмножество V множества S точек n-мерного эвклидова пространства E_n автор называет множеством видимости в S, если для каждой точки $y \in S$ существует точка $z \in V$ такая, что сегмент $yz \subset S$. Континуум (связное компактное множество) видимости в S называют минимальным континуумом видимости в S относительно $x \in S$, если он содержит x и не содержит

как правильную часть, никакой континуум видимости S, содержащий точку x. Заменяя слово «континуум» словами «выпуклое замкнутое множество», получаем определение минимального выпуклого замкнутого множества видимости в S относительно x.

В работе доказываются две теоремы.

Теорема 1. Если S — замкнутое множество в E_n каждая точка $x \in S$ содержится в единственном минимальном континууме видимости $V(x)$ в S, то либо S — выпуклое множество, либо $\bigcap_{x \in S} V(x)$ есть непустой континуум (оба случая имеют место тогда и только тогда, когда S состоит из одной точки).

Теорема 2. Если S — компакт из E_2 и каждая точка содержится в единственном минимальном выпуклом замкнутом множестве видимости $V(x)$ в S, то либо S — выпуклое множество, либо S является звездообразным относительно одной и только одной точки из S.

Автор считает, что обобщение теоремы 2 на $E_n (n>2)$ должно представлять значительные трудности.

Г. Ш. Рубинштейн

6095. **Евклидовы плоскости с соседними элементами.** Клинген берг (Euklidische Ebenen mit Nachbarelementen. Klingenberg Wilhelm), Math. Z., 1954, **61**, № 1, 1—25 (нем.)

Строится плоская геометрия, в системе аксиом которой нет условия однозначной определимости прямой, с помощью двух точек. Такая геометрия была построена ранее (см., например, Hjelmsleu, Natürliche Geometrie, Leipzig, 1923). В данной статье за основу берутся элементы — прямые, над которыми определяются действия, называемые движениями, множество которых образует некоторую группу. Основные особенности такой геометрии следующие: 1. Существуют «соседние» (benachbart) точки такие, между которыми можно провести более одной прямой. 2. Существуют «соприкасающиеся» прямые (Schmieggeraden), т. е. такие, которые пересекаются между собой более чем в одной точке. 3. Две прямые определяют в пересечении (единственную) точку, если они взаимно перпендикулярны.

А. С. Кованько

6096. **Общие секущие плоских выпуклых множеств.** Кли (Common secants for plane convex sets. Klee V. L., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 639—641 (англ.)

Пусть F — конечная совокупность выпуклых плоских множеств плоскости E_2. Из того, что каждые k из них имеют общие секущие, т. е. прямую, их пересекающую, при некоторых дополнительных условиях может вытекать, что все множества семейства имеют общую секущую. Различные виды таких дополнительных условий даны Сантало, Винченсини и др.

Автор статьи усиливает результат Винченсини, согласно которому при $k = 4$ достаточно выполнения условия: в плоскости существует прямая, никакая из параллельных к которой не пересекает более одного множества из F,— показывая, что при том же условии можно ограничиться предположением $k=3$.

В. В. Рыжков

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

6097. **Неприводимые выпуклые множества.** Гейл (Irreducible convex sets. Gale David), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 217—218 (англ.)

Резюме работы автора по исследованию неприводимых (непредставимых в виде векторной суммы двух различных множеств) выпуклых множеств (М). Как неприводимые указаны: симплекс, октаэдр, икосаэдр, объединение точки и множества размерности, меньшей размерности объемлющего пространства. Наоборот, приводимы: М с достаточно гладкой границей, все двумерные М, отличные от треугольников, n-мерные полиэдры, в каждой вершине которых сходятся n граней.

В. В. Морозов

6098. **О выпуклых конусах.** Сандгрен (On convex cones. Sandgren Lennart), Math. scand., 1954, 2, № 1, 19—28 (англ.)

Устанавливается связь между известными теоремами Каратеодори и Хелли о выпуклых множествах в E^n. Основным инструментом исследования является понятие выпуклого конуса C и полярного конуса C^*, который определяется как множество точек $X \in E^n$, для которых $(X, Y) \leqslant 0$, где Y — любая точка из C, а (X, Y) — скалярное произведение X и Y. Если $\{C_A\}$ — система замкнутых выпуклых конусов, то $(\bigcap C_A)^* = \mathscr{C} \cup C_A^*$ ($\mathscr{C} \cup C_A^*$ — замкнутая выпуклая оболочка $\bigcup C_A^*$). Отсюда следует, что $\bigcap C_A = 0$ тогда и только тогда, когда выпуклая оболочка $\mathscr{K} \cup C_A^* = E^n$. Из теоремы Каратеодори (в применении к любому конусу M эта теорема утверждает, что $X \in \mathscr{K}M$ представим в виде $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$, где $X_j \in M$, $X_1, \ldots, X_r$ линейно независимы, $r \leqslant n$) следует: если имеется луч OX, не принадлежащий ни одной выпуклой оболочке любых n конусов M_A системы $\{M_A\}$, то и $\mathscr{K} \cup M_A$ не содержит OX, т. е. все конусы M_A содержатся в некотором полупространстве. Эти предположения позволяют доказать теорему Хелли: если $\{K_A\}$ — такая система замкнутых выпуклых множеств в E^n, что любые $n+1$ множества имеют общую точку и некоторые множества имеют ограниченное (непустое) пересечение, то система множеств $\{K_A\}$ имеет общую точку. Действительно, пусть E^n — гиперплоскость $X_{n+1} = -1$ в E^{n+1}. Проектируя каждое K_A из начала координат и замыкая полученные конусы, получим систему замкнутых конусов $\{C_A\}$. Очевидно, точка $N(0, 0, \ldots, -1) \in E^{n+1}$ не принадлежит $(C_{A_1} \cap \ldots \cap C_{A_n})^* = \mathscr{C}(C_{A_1}^* \cup \ldots \cup C_{An}^*)$. Следовательно, согласно предыдущему утверждению, $N \notin \mathscr{K} \cup C_A^*$, т. е. $\mathscr{K} \cup C_A^* \neq E^{n+1}$. Отсюда следует, что $\bigcap C_A \neq 0$, что и доказывает теорему.

В статье доказывается также теорема: Пусть $\{C_A\}$ — такая система замкнутых выпуклых конусов в E^n, что выпуклая оболочка любых n конусов C_A не совпадает с E^n. Тогда существует плоскость π, которая не разделяет ни одного конуса C_A, если же все конусы C_A n-мерны, то эту плоскость можно выбрать так, что выбранные по произволу n конусов C_A будут расположены по одну сторону от π.

Э. Г. Позняк

6099 Д. **Однозначная определенность бесконечных выпуклых многогранников и некоторых выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского.** Данелич И. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1955

6100 Д. **Об изменении внешней формы поверхности в связи с изменением ее внутренней метрики.** Сурун Н. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1955

6101 Д. **К теории опорной функции и радиуса.** Шиндлер (Beiträge zur Theorie von Stützfunktion und Radius. Schindler Johann Jakob. Diss., Bern, 1952), Schweiz. Buch., 1954, B54, № 1, 35 (библ.)

См. также: 5543, 5544, 5546, 5548, 5566, 5676, 5695

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

6102. К оценке погрешности при численном решении уравнений гиперболического типа. Райкерус А. А., Уч. зап. Карело-Финск. ун-та, 1954, **3**, № 4,3—15

Оценивается погрешность ξ_{ik} при решении методом сеток уравнения $\partial^2 u/\partial t^2 = a^2(\partial^2 u/\partial x^2) + b(\partial u/\partial x) + c(\partial u/\partial t) + f(x, t)$, $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$: $|\xi_{ik}| < \gamma h^2$, где γ — константа (которая не раскрывается), не зависящая ни от шага h сетки, ни от узла ik. При этом автор учитывает только погрешности, возникающие в результате замены дифференциальных отношений, встречающихся как в данном уравнении, так и в начальном условии, соответствующими разностными отношениями. В. К. Саульев

6103. Ошибки округления в релаксационных решениях уравнения Пуассона. Митчелл (Round-off errors in relaxational solutions of Poisson's equation. Mitchell A. R.), Appl. Scient. Res., 1954, **B3**, № 6, 456—464 (англ.)

Задача Дирихле для уравнения $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = f$, $-a \leqslant x \leqslant a$; $-b \leqslant y \leqslant b$ аппроксимируется системой алгебраических уравнений

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}\{\varphi_{m+1,n} - 2\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n}\} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\{\varphi_{m,n+1} - 2\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1}\} = f, \qquad (1)$$

$-M < m < M$; $-N < n < N$; $M = a/\Delta x$; $N = b/\Delta y$. Пусть невязки $R_{m,n}$, возникающие при решении системы (1), удовлетворяют неравенствам $-R \leqslant R_{m,n} \leqslant R$. Если положить $R_{m,n} \equiv R$ (самый неблагоприятный случай), то ошибка $\varepsilon_{m,n}$ в $\varphi_{m,n}$ удовлетворяет системе $(2M-1)(2N-1)$ уравнений:

$$(\varepsilon_{m+1,n} - 2\varepsilon_{m,n} + \varepsilon_{m-1,n}) + k(\varepsilon_{m,n+1} - 2\varepsilon_{m,n} + \varepsilon_{m,n-1}) = R, \qquad (2)$$

где $k = (\Delta x)^2/(\Delta y)^2 = (a/b)^2(N/M)^2$ (предполагается, что ошибки округления на границе равны нулю: $\varepsilon_{m,N} = \varepsilon_{m,-N} = \varepsilon_{M,n} = \varepsilon_{-M,n} = 0$). Путем обращения (2) автор находит для ошибки:

$$\varepsilon_{m,n} = \left[\frac{m^2 - M^2}{2} + \frac{1}{4M}\sum_{r=0}^{M-1}\frac{(-1)^r \cos[(r+1/2)\pi/2M]}{\sin^3[(r+1/2)\pi/2M]\operatorname{ch}\beta N} \times \cos\frac{(r+1/2)\pi m}{M}\operatorname{ch}\beta n\right] R,$$

где $\operatorname{ch}\beta = 1 + \frac{2}{k}\sin^2\frac{(r+1/2)\pi}{2M}$.

Далее автор исследует зависимость максимальной ошибки округления, которая возникает в центре прямоугольника ($m = n = 0$), от числа узлов и от соотношения между шагами Δx и Δy при постоянном числе узлов. Так, например, при $A^2 = MN \to \infty$

$$\varepsilon_{0,0} \approx -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)\frac{A^2}{V\overline{k}}\left[1 - \frac{32}{\pi^3 \operatorname{ch}\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\pi}{2}}\right] R$$

(для квадрата ($a = b$) при $k = 1$ $\varepsilon_{0,0} \approx 0{,}294\, A^2 R$).

Для одномерного случая $d^2\varphi/dx^2 + k\varphi = f$ автором выведены более точные оценки погрешности округлений. В. К. Саульев

6104. Численное решение уравнения Пуассона и бигармонического уравнения посредством матриц. Корнок (The numerical solution of Poisson's and the bi-harmonic equations by matrices. Cornock A. F.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1950, № 4, 524—535 (англ.)

Рассматривается метод решения систем конечноразностных уравнений, аппроксимирующих уравнения Пуассона и бигармоническое уравнение, в матричной форме. Разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение Пуассона в прямоугольной области двумерного пространства, записывается в матричной форме

$$MV = \Gamma, \qquad (1)$$

где V — столбец значений функции в точках сетки, Γ — столбец из граничных значений и правых частей,

$$M = \begin{bmatrix} A & -I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -I & A & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I & A & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -I & A \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

A составлена из коэффициентов разностного уравнения, стоящих при значениях функции, расположенных на одной линии. Уравнение (1) умножается на матрицу a, выбранную таким образом, что матрица aM становится левой треугольной клеточной матрицей. При этом матрица a состоит из подматриц a_{pq}, в выборе которых имеется произвол. В результате сведения матрицы aM к треугольной решение уравнения (1) распадается на решение систем из меньшего числа уравнений для определения значений функции на каждой линии сетки.

Метод применим и для уравнений более общего вида и областей, составленных из прямоугольников. Рассматривается вопрос о построении матричного уравнения и приведения матрицы к треугольной форме для уравнения Пуассона в трехмерном пространстве. Для бигармонического уравнения строится матричное уравнение и рассматривается вопрос о приведении матрицы к удобному виду. К. Е. Чернин, О. А. Федорова

6105. Численные методы для цифровых машин, работающих в истинном масштабе времени. Грей (Numerical methods in digital real-time simulation. Gray H. J., Jr), Quart. Appl. Math., 1954, 12, № 2, 133—140 (англ.)

Для конструирования машин типа, указанного в названии работы, проведено исследование накопления ошибок при решении систем линейных дифференциальных уравнений разностными методами. Для простоты рассматриваются лишь уравнения с постоянными коэффициентами, но результаты (без теоретического обоснования) применяются и к уравнениям с переменными коэффициентами. Система $d\bar{x}/dt = A\bar{x}$, где $\bar{x}(t)$ — n-мерная вектор-функция, решается некоторым экстраполяционным методом с последующим уточнением, причем каждому собственному значению λ матрицы A соответствуют несколько собственных значений w для решения разностной системы, так что имеет место равенство $z = \lambda h = R(e^w)$, где R — рациональная функция, зависящая от выбранного метода. Если действительные части всех значений w отрицательны, разностный метод устойчив в отношении накопления ошибок. Для подсчета w_i по λ_i использован графический метод, основанный на изображении функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, где $w = u + iv$, $z = x + iy$. Приведены соответствующие графики для одного из методов; вычисления для составления этого графика ввиду их громоздкости были проведены на автоматической вычислительной машине Пенсильванского университета. М. Л. Бродский

6106. Погрешности асимптотических решений линейных дифференциальных уравнений. Эванс (Errors in asymptotic solutions of linear ordinary differential equations. Evans Robert L.), Quart. Appl. Math., 1954, **12**, № 3, 295—300 (англ.)

Пусть y — решение дифференциального уравнения $L(y) \equiv \Sigma_{\nu=0}^{n} p_\nu(x)\, y^{(n-\nu)} = 0$, где $p_\nu(x)$ — полиномы (можно рассматривать и более общий случай), $u \sim \Sigma_{\alpha=0}^{\infty} c(\alpha)\, x^{\rho-\alpha}$ — асимптотический ряд для y, u — конечный отрезок этого ряда, $v = y - u$ — оцениваемая разность. Для коэффициентов $c(\alpha)$ выписывается рекуррентная формула, на основе ее составляется дифференциальное уравнение $M(v) = 0$. Тогда $L(u) = -L(v) = M(v) - L(v)$, это дает неоднородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка для v, у которого коэффициент при производной n-го порядка может быть сделан равным нулю путем умножения $M(v)$ на некоторую функцию. В частности, если первоначальное уравнение второго порядка, для v получается уравнение первого порядка, что дает возможность легко оценить v. М. Л. Бродский

6107. Об ошибке округлений при решении систем линейных уравнений. Абрамов А. А., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 2, 189—191

Проводятся оценки невязок, возникающих из-за ошибок округления при решении системы линейных уравнений методом исключения. Предполагается, что действия проводятся с фиксированным числом знаков после запятой. Ошибки, возникающие при умножении и делении ненулевых чисел (сложение и вычитание указанных чисел не вносят ошибок), считаются независимыми случайными величинами. Даются формулы для дисперсии невязок и некоторые оценки этих дисперсий. Учитывается возможность того, что в исходной системе многие коэффициенты нули. В. Н. Фаддеева

6108. Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы на первой модели машины АКЕ. Уилкинсон (The calculation of the latent roots and vectors of matrices on the pilot model of the A. C. E. Wilkinson J. H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, № 4, 536—566 (англ.)

Первые девять параграфов работы посвящены описанию итерационных методов для определения собственных значений и собственных векторов матрицы. Кроме хорошо известных методов (метод простой итерации, некоторая его модификация и δ^2-процесс для определения наибольшего собственного значения и принадлежащего ему собственного вектора, методы λ-разности, исчерпывания и понижения для определения остальных собственных значений и векторов), для симметричной матрицы описан метод диагонализации. Метод состоит в построении ортогональной матрицы T, такой что матрица $T'AT$ диагональна (A симметрична). Известно, что в этом случае диагональные элементы являются собственными значениями матрицы A, а столбцы матрицы T — соответствующими собственными векторами. Матрица T строится как бесконечное произведение элементарных ортогональных матриц T_r, каждая из которых выбирается из условия аннулирования наибольшего внедиагонального элемента предыдущего произведения $T_{r-1}'\ldots T_1' AT_1 \ldots T_{r-1} \ldots$. Многократное повторение процесса приводит к аннулированию всех внедиагональных элементов с любой степенью точности. Параграфы 10—15 посвящены описанию опыта применения на первой модели машины АКЕ этих методов для вычисления всех собственных значений и собственных векторов матриц. По утверждению автора, были испытаны многочисленные матрицы до 60 порядка включительно, и полученные результаты оказались достаточной точности.

Дается краткое описание «быстрых» и «медленных» программ. Программировались модификация метода простой итерации и метод понижения. Метод диагонализации не использовался. Комплексные собственные значения не вызывали затруднений.

В. Н. Фаддеева

6109. Диагонализация комплексной матрицы общего вида как новый метод решения систем линейных уравнений. Когбетлянц (Diagonalization of general complex matrices as a new method for solution of linear equations. Kogbetliantz Ervand George), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 356—357 (англ.)

Для решения системы $Ax = b$ с комплексной матрицей предлагается следующий итерационный процесс. Матрица A последовательно умножается справа и слева на унитарные матрицы специального вида (вид матриц не приводится). Элементы этих матриц (отличающихся от единичной четырьмя элементами) подбираются так, чтобы при каждом умножении аннулировалась некоторая пара симметричных по отношению к главной диагонали недиагональных элементов. В течение одного цикла, состоящего из $n(n-1)/2$ умножений, аннулированию подвергаются по очереди все внедиагональные элементы. С результирующей матрицей процесс повторяется. Утверждается, что процесс быстро сходится. Утверждается, что для проведения вычислений требуются быстродействующие машины. Отметим, что та же идея предлагалась для определения собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы Уилкинсоном (реф. 6108).

В. Н. Фаддеева

6110. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Чиммино. Каприоли (Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari con il metodo di Cimmino. Caprioli Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1953, **8**, № 3, 260—265 (итал.)

Метод Чиммино для решения системы

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

состоит в образовании итераций по следующему правилу:

$$x_k^{(\nu)} = x_k^{(\nu-1)} - \frac{2}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \sum_{i=1}^{n} m_i\, a_{ik} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(\nu-1)} - b_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2},$$

где m_i суть произвольные положительные числа. Этот метод сходится, если ранг матрицы $\| a_{ik} \|$ больше единицы.

В настоящей работе рассматривается близкий по типу итерационный процесс:

$$x_k^{(\nu)} = x_k^{(\nu-1)} - \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i^{(\nu-1)} - b_j \right).$$

Доказывается, что если $\Sigma_{i,\,k}\, a_{ik}^2 \leqslant 2$, $\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{jk} < 2/n$ (при $i \neq j$), то процесс сходится.

Утверждается, что этот метод удобен для вычислений на электронных вычислительных машинах. Последнее обстоятельство может компенсировать его медленную сходимость. Ю. А. Шрейдер

6111. Матричный символизм для решения нормальных систем линейных алгебраических уравнений. Джери (Il simbolismo delle matrici nella soluzione del sistema normale gaussiano. Geri Gero), Riv. catasto e serv. tecn. erariali, 1954, **9**, № 2, 117—120 (итал.)

Дается описание в матричной символике ряда известных методов обращения матриц и решения систем линейных алгебраических уравнений вида

$$A\bar{x} = \bar{l}, \qquad (1)$$

где A — матрица n-го порядка, $\bar{x}$ — неизвестный, а $\bar{l}$ — известный векторы.

Излагаются методы Гаусса, Холецкого, простых итераций и Зейделя. В заключение указывается, что, разбив неизвестные на две группы $\bar{x}'$ и $\bar{x}''$, можно записать систему (1) в виде

$$A_{11}\bar{x}' + A_{12}\bar{x}'' = \bar{l}',$$
$$A_{21}\bar{x}' + A_{22}\bar{x}'' = \bar{l}''.$$

Таким образом решение системы (1) сводится к обращению матриц меньшего порядка, чем у исходной матрицы A. Библ. 11 назв. Ю. А. Шрейдер

6112. Формулы численных квадратур, наиболее выгодные для применения. Гинзбург Б. Л., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 2, 137—142

Рассматриваются симметрические формулы механических квадратур с равноотстоящими абсциссами вида

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R \quad (n \geqslant 2), \qquad (1)$$

отличающиеся от формул Ньютона — Котеса тем, что все абсциссы x_i являются в строгом смысле внутренними для промежутка интегрирования: $|x_1| = |x_n| = s < 1$. При одном и только одном (для заданного n) значении $s < 1$ порядок точности l формулы (1), получаемой интегрированием интерполяционной формулы Лагранжа, оказывается повышенным на 2 для четного n и на 3 для нечетного n, по сравнению с соответствующей формулой Ньютона — Котеса. Построенные таким образом формулы квадратур с иррациональными абсциссами, а также (при $n > 2$) и коэффициентами — автор и называет условно «наиболее выгодными для применения».

При $n = 2$ и $n = 3$ формулы совпадают с хорошо известными гауссовскими. Для дальнейших значений n все коэффициенты A_i остаются положительными при $n < 13$.

Приводятся для значений $n \leqslant 11$ таблица коэффициентов A_i и таблица, содержащая значения шага $x_{i+1} - x_i$ и остаточного члена $R = r_l$ для $f(x) = \frac{1}{2}x^l$.

Вопрос о виде остаточного члена для l-кратно дифференцируемой $f(x)$ не рассматривается. Е. Я. Ремез

6113. Формула приближенного вычисления интегралов, точная для параболы. Бонфильи (Formula di integrazione approssimata adatta per la parabola. Bonfigli Clemente), Riv. catasto e serv. tecn. erariali, 1954, 9, № 2, 114—116 (итал.)

Выводится формула квадратур, точная для парабол третьей степени:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left[y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1} - \frac{1}{6}\left(y_1 + y_{2n-1}\right) + \frac{1}{8}\left(y_0 + y_{2n}\right) + \frac{1}{24}\left(y_2 + y_{2n-2}\right)\right].$$

Для примера, рассмотренного в работе, формула дала погрешность, сравнимую с погрешностью формулы Симпсона. Общая оценка погрешности не приведена. М. Л. Бродский

6114. О погрешности формулы трапеций. Милн (The error of the trapezoidal formula. Milne William Edmund), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 362—363 (англ.)

Формула трапеций, как вытекает из формулы Эйлера — Маклорена, является более точной, чем обычно: а) при вычислении определенного интеграла от периодической функции по периоду; б) при вычислении несобственного интеграла от $-\infty$ до $+\infty$ от быстро убывающей функции. Автором получены оценки погрешности формулы трапеций: а) при интегрировании по конечному сегменту 1) функции с ограниченным изменением, 2) функции, обладающей производной с ограниченным изменением, 3) дважды дифференцируемой функции; б) при интегрировании по периоду периодической функции, имеющей $(k-1)$-ю производную с ограниченным изменением; в) при интегрировании от $-\infty$ до $+\infty$ функции, которая стремится к нулю при $x \to \pm\infty$ вместе с производными до $2k$-го порядка включительно. Сами оценки не приведены. М. Л. Бродский

6115. Формулы Симпсона для двукратных интегралов. Тордьон (Die Simpsonsche Formel für die zweifache Integration. Tordion Georges), Elem. Math., 1953, 8, № 4, 86—88 (нем.)

Для интегралов вида

$$F(x_\lambda) = \int_{x_0}^{x_\lambda}\int_{x_0}^{x_{\lambda-1}}\ldots\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx\,dx_1\ldots dx_{\lambda-1}$$

автор, применяя преобразование Лапласа, получает ряд квадратурных формул. В частности, при $\lambda = 2$ и подразделении основного интервала на $2n$ равных частей ($x_{2s} = 2s\Delta x$) имеет место следующий двумерный аналог формулы Симпсона:

$$F(x_{2n}) = \frac{2}{3}\Delta x^2 \sum_{s=1}^{n}\{[(n-s)+1]\,y_{2s-2} + [4(n-s)+2]\,y_{2s-1} + [n-s]\,y_{2s}\}.$$

Приводятся два примера. В. К. Саульев

6116. Модификация линейного итерационного процесса полиномиальной интерполяции Эйткена — Невилля. Туиди (A modification of the Aitken-Neville linear iterative procedures for polynomial interpolation. Tweedie M. C. K.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 45, 13—16 (англ.)

Пусть заданы значения функции $f(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Обозначим через $P_{k-1}(i_1, \ldots, i_k)$ значение в точке x полинома $k-1$-й степени, построенного по значениям $f(x)$ в точках $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$. Но $P_{k-1}(i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k)$ и $P_{k-1}(i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1})$ может быть вычислен

$$P_k(i_1,\ldots,i_{k-1},i_k,i_{k+1}) = [P_{k-1}(i_1,\ldots,i_{k-1},i_k)(x - x_{i_{k+1}}) - P_{k-1}(i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1})(x - x_{i_k})](x_{i_k} - x_{i_{k+1}})^{-1}.$$

Известны две схемы последовательного вычисления $P_{m-1}(1, 2, \ldots, m)$. Эйткена и Невилля (Милн, Численный анализ, гл. 3); метод Эйткена допускает более удобное расположение вычислений (вручную), а метод Невилля дает меньше погрешностей в промежуточных выкладках и допускает обобщения на случай интерполяции с кратными узлами.

В работе предлагается новый метод: сперва (пусть, например, $m = 2n$) подсчитываются $P_1(k, n+1)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ и $P_1(n, k)$ $(n+1 \leqslant k \leqslant 2n)$, затем $P_2(k, n, n+1)$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ и $P_2(n, n+1, k)$ $(n+2 \leqslant k \leqslant 2n)$, затем $P_{2p}(k, n-p+1, \ldots, n+p)$ $(1 \leqslant k \leqslant n-p)$ и $P_{2p}(n-p+1, \ldots, n+p, k)$ $(n+p+1 \leqslant k \leqslant 2n)$, затем $P_{2p+1}(k, n-p+1, \ldots, n+p+1)$ $(1 \leqslant k \leqslant n-p)$ и $P_{2p+1}(n-p, \ldots, n+p, k)$ $(n+p+1 \leqslant k \leqslant 2n)$. Вычисления располагаются так же удобно, как в методе Эйткена, промежуточные вычисления дают меньше погрешностей, чем в методе Невилля (при $x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < x_{2n}$). Некоторые значения вычис-

ляются двумя разными способами, что обеспечивает контроль. М. Л. Бродский

6117. Об одном улучшении формулы Стирлинга. Бергер (Eine Verbesserung der Stirlingschen Formel. Berger E. R.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 1—2, 69—70 (нем.)

Приближенное представление функции Гаусса $\Pi(x)$ формулой Стирлинга: $\Pi(x) \sim (x/e)^x \sqrt{2\pi x}$ улучшается при использовании трех членов асимптотического разложения $\ln \Pi(x)$.

Приводятся соответствующие приближенные формулы для вычисления функции $\Pi(x)$ и следствия этих формул.

Если n — целое число и $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, то

$$\Pi(n+\vartheta) \sim \Pi(n) C_n^{-\vartheta} \left(1+\frac{\vartheta}{n+1}\right)^{n+\vartheta} \sqrt{1+\frac{6\vartheta}{6n+r}}, \quad (1)$$

где

$$C_n = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} \sqrt{\frac{6n+13}{6n+7}}.$$

Погрешность ε формулы (1) при $0 < \vartheta < 1$ $\varepsilon < \dfrac{1}{144\,(n+1+\vartheta)^4}$. А. И. Взорова

6118. Итерационные методы решения уравнений и систем уравнений. I, II. Людвиг (Über Iterationsverfahren für Gleichungen und Gleichungssysteme. I, II. Ludwig Rudolf), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 6, 210—225; № 10—11, 404, 416 (нем.; резюме англ., франц., русс.)

Если при решении уравнения $x = f(x)$ итерационным методом $x_{n+1} = f(x_n)$ для корня $\bar{x}$ выполняются равенства $f'(\bar{x}) = f''(\bar{x}) = \ldots = f^{(k-1)}(\bar{x}) = 0$, $f^{(k)}(\bar{x}) \neq 0$ и $f^{(k)}(x)$ непрерывна в окрестности $\bar{x}$, то данный итерационный метод — k-го порядка, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - \bar{x}) \cdot (x_n - \bar{x})^{-k} = c \neq 0. \quad (1)$$

Выводится ряд формул для итерационных методов различных порядков, основанных на замене данного уравнения уравнением с тем же корнем, для которого выполнены указанные условия. Формулы содержат произвольные константы и функции, выбор которых зависит от конкретной задачи. Даются оценки начального отклонения $x_0 - \bar{x}$, обеспечивающие сходимость. Рассмотрены методы ускорения сходимости итерационных процессов как основанные непосредственно на соотношении (1), так и с использованием производных от $f(x)$, приведены оценки для погрешности после использования метода ускорения сходимости. Линейным комбинированием p методов k-го порядка можно получить метод $k+p-1$-го порядка, приведены примеры применения этого приема. Приведена таблица различных методов с подсчетом количества операций на один шаг для каждого метода. Во второй части эти же вопросы рассматриваются для систем уравнений.

М. Л. Бродский

6119. Отыскание корня уравнения посредством итерации. Стелсон (Finding the root of an equation by iteration. Stelson H. E.), Skand. aktuarietidskr., 1954, № 1—2, 10—18 (англ.)

Дается прием, улучшающий итерационный метод решения уравнения $x = f(x)$, когда $f(x)$ — убывающая функция x. Вычисление итерационной последовательности $x_{n+1} = f(x_n)$ комбинируется с интерполяцией, линейной или квадратической, ряда $y_n = f(x_n)$, после чего ищется пересечение прямой $y = x$ с прямой, или параболой, аппроксимирующей кривую $y = f(x)$. Так, линейная интерполяция дает две формулы:

$$x = x_0 - \frac{(\Delta x_0)^2}{\Delta^2 x_0}; \quad x = x_0 + \frac{\Delta x_0\,(\Delta x_0 + \Delta x_1)}{\Delta x_1 + \Delta x_2},$$

из которых одна дает x с избытком, другая с недостатком, в зависимости от знака $f''(x)$. Квадратическая интерполяция приводит к несколько более сложным формулам, обеспечивающим зато более тесные границы для x. Достоинством этого приема является то, что он дает сравнительно тесные границы для корня даже и в том случае, когда итерационная последовательность расходится. Изложение статьи сопровождается числовыми примерами. Н. А. Ростовцев

6120. О решении уравнений методом итераций. Коппел (The solution of equations by iteration. Coppel W. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 1, 41—43 (англ.)

Рассматривается решение уравнения $x = f(x)$ в интервале $[a, b]$ методом итераций: $x_{n+1} = f(x_n)$, $a \leqslant x_1 \leqslant b$. Предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна и $a \leqslant f(x) \leqslant b$ при $a \leqslant x \leqslant b$, что обеспечивает существование корня. Всякий корень $x = f(x)$ удовлетворяет и $x = f(f(x))$. Отсутствие у уравнения $x = f(f(x))$ корней, отличных от корней уравнения $x = f(x)$, необходимо и достаточно для того, чтобы итерационный процесс сходился при любом выборе начальной точки. Доказательство этой основной теоремы опирается на лемму: если каждый корень $x = f_2(x)$ удовлетворяет $x = f(x)$, то из $f(c) >, =, < c$ следует соответственно $f_k(c) >, =, < c$; здесь $f_k(x) = f(f_{k-1}(x))$, $f_1(x) = f(x)$. Из доказываемой далее заключительной теоремы следует, что для того чтобы уравнение $x = f(x)$ имело точно один корень в $[a, b]$ и чтобы любая итерационная последовательность сходилась к нему с улучшением приближений на каждом шагу, достаточно выполнения неравенства $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, $a \leqslant x,\ y \leqslant b$, $x \neq y$. Автору таким образом удается ослабить обычно приводимое достаточное условие $|f(x) - f(y)| \leqslant \theta |x - y|$, $0 < \theta < 1$.

А. П. Лавут

6121. Об определении корней уравнения. Франк (On the determination of the roots of equations. Frank Evelyn), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 104—105 (англ.)

Рассматривается метод решения системы двух уравнений $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, получаемый разложением f и g в ряд Тейлора в окрестности начального приближения, с учетом не только линейной части, но и некоторых добавочных членов. Метод удобен для вычисления корней уравнения $F(z) = 0$, где $F(z)$ — функция комплексного переменного z. Рассматривается сходимость метода и упоминается об оценке ошибки, возникающей из-за использования только некоторого количества членов; оценка не приводится.

М. А. Мертвецова

6122. Сложение векторов и счетная линейка. Лондон (Vector addition and the slide rule. London A. G.), Wireless World, 1955, 61, № 2, 73 (англ.)

Указывается известный способ нахождения с помощью логарифмической линейки выражения $\sqrt{x^2+y^2}$ (Радецкий П. С., Никитин В. А., Логарифмическая счетная линейка, 1925, стр. 79). Е. К. Нечаев

6123. Решение интегральных уравнений при помощи центров тяжести. Филин А. П., Инженерный сб. 1954, 20, 177—182

Предлагается численно-графический способ решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода, основанный на известном аналитическом методе последовательных приближений и методе А. А. Попова интегри-

рования с помощью ортогональных фокусов (Попов А.А., Новый метод интегрирования при помощи ортогональных фокусов, Гостехиздат, 1947). Ю. Ф. Харкеевич

6124. **Вопрос о раскрое эллиптического конического патрубка. Мартиросян И. О.,** Сб. науч. тр. Армян. с.-х. ин-та, 1954, № 8, 203—226 (резюме арм.)

Рассматривается построение развертки эллиптического конуса и дается точное выражение угла развертки через эллиптические интегралы. Применяя формулу Симпсона для приближенного вычисления интегралов, автор получает в приводимом примере результат, отличие которого от величины угла развертки, полученного графическим способом (не приведенным в статье), составляет 0,05% по отношению к величине угла. Ввиду простоты графического построения последний и рекомендуется автором. В. С. Люкшин

6125. **О наилучшем проективном преобразовании шкал и номограмм. Людвиг** (Bemerkungen zur günstigsten projektiven Abbildung von Skalen und Nomogrammen. Ludwig Rudolf), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 8—9, 298—299 (нем.)

Уравнение прямолинейной шкалы записывается в виде $y = f(x) = [P(x) - F(x_1)] / [F(x_2) - F(x_1)]$, и исследуется проективное преобразование шкалы, задаваемое матрицей $\begin{pmatrix} \tau & 0 \\ \tau & -1 & 1 \end{pmatrix}$, при котором концы шкалы неподвижны и направление сохраняется. Рассматривается выражение

$$T[f(x)] = T(x, \tau) = \frac{\tau f'(x)}{[1 + (\tau - 1) f(x)]^2},$$

аналогичное «равномерной характеристике шкалы» (Пентковский М. В., Номография, М. — Л., ГТТИ, 1949, стр. 179 — 186). Доказывается, что в области $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $0 < \tau < \infty$ $T(x, \tau)$ будет иметь по крайней мере одну стационарную точку, координата которой τ и принимается за τ_0 — наилучшее значение параметра.

Наилучшим проективным преобразованием номограммы, состоящей из трех прямолинейных шкал, названо преобразование, в котором две из трех шкал определены описанным выше способом. Литературных ссылок нет.

Примечание референта. Задачи о наилучшем преобразовании шкалы и номограммы возникли в номографии в связи со стремлением построить номограмму, которая обеспечивала бы в заданной области изменения переменных или необходимую или наибольшую точность ответа при принятом способе ее оценки (см. цитированную книгу). Автор не связывает введенное им понятие с подобной задачей, и построенная по его способу номограмма не всегда будет лучшей из возможных с точки зрения вычислений. М. В. Пентковский

6126. **Номограммы. Варрьяле** (I nomogrammi. Varriale Leone), Ingegneria mecc., 1954, **3**, № 2, 33—41 (итал.; резюме франц., англ., нем.)

6127. **Номограмма для преобразования гиперболического и кругового тангенса и котангенса к показательной форме. Вильнер И. А.,** Электричество, 1954, № 7, 95—97

6128. **Номограмма для коэффициентов a и b. Рейн** (Fluchtlinientafel für die Richtungskoeffizienten a und b. Rein R.), Z. Vermessungswesen, 1953, **78**, № 7, 233—234 (нем.)

Приводится номограмма из выравненных точек для определения величин a и b по формулам

$$a = \frac{\rho'' \sin 2\nu}{2\Delta x}, \quad b = -\frac{\rho'' \sin 2\nu}{2\Delta y}$$

(задача, связанная с триангуляцией). Г. Е. Джемс-Леви

6129. **Номограмма для расчета изгибаемого стержня, состоящего из двух частей. Мюллер** (Nomogramm für zweiteilige Knickstäbe. Müller Eugen), Stahlbau, 1954, **23**, № 8, 188—189 (нем.)

Приводятся две транспарантные номограммы для определения допустимого просвета между частями составного изгибаемого стержня, при заданном характере поперечного сечения и известной нагрузке.

Номографируемые формулы

$$\lambda_{yi} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_1^2},$$

где

$$\lambda_y = s_{ky} / i_y, \ \lambda_1 = s_{k1} / i_1$$

или

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{(F / zF_D)(d^3 / s_{k1} l^2)}.$$

Г. Е. Джемс-Леви

6130. **Возможности математического определения протекания в нормальных вальцовочных профилях. Вусатовский, Вусатовский** (Möglichkeiten der mathematischen Bestimmung des Fließvorganges in regulären Walzprofilen. Wusatowski Z., Wusatowski R.), Metallurgie und Giessereitechnik, 1954, **4**, № 7, 295—307 (нем.)

В статье, посвященной вопросам определения производительности и необходимого давления при прокатке, приводится большое количество элементарных номограмм из выравненных точек, для определения различных вспомогательных величин. Г. Е. Джемс-Леви

6131. **Преобразования координат при помощи номограммы и приложение к графическому решению дифференциальных уравнений. Рихтер** (Koordinatentransformationen mit Hilfe eines Fluchtliniennomogramms und Anwendungen auf die graphische Lösung von Differentialgleichungen. Richter W.), Österr. Ingr-Arch., 1954, 8, № 1, 39—47 (нем.)

Приводится номограмма из выравненных точек, служащая для преобразования декартовых координат в полярные, и наоборот. Указывается, что можно использовать это преобразование для упрощения построений при графическом решении некоторых дифференциальных уравнений. Г. Е. Джемс-Леви

6132. **Номограмма для быстрого решения проблемы влажности. Стерн** (Here is a nomograph to solve your humidity problems—easily. Stern Stuart), Chem. Engng, 1954, **61**, № 1, 188—189 (англ.)

Номограмма из выравненных точек с параллельными шкалами H (абсолютная влажность), T (температура сухого шарика термометра) и бинарным полем в виде семейства параллельных шкал T_w (температура влажного шарика термометра), построенных для различных жидкостей. Номограмма реализует формулу

$$H = \frac{\log^{-1}\left(A - \frac{B}{T_w + 460}\right)}{\frac{M_g}{M_v} - [1 - \log^{-1}\left(A - \frac{B}{T_w + 460}\right)} - \frac{h_g}{K_g M_g P L_w}(T - T_w),$$

A и B — постоянные коэффициенты; M_g, M_v, h_g, K_g, M_g, P, L — физические величины, зависящие только от рода жидкостей. Г. С. Хованский

ТАБЛИЦЫ

6133. **Интегралы, встречающиеся в задачах о строении молекул. Далгарно** (Integrals occurring in problems of molecular structure. Dalgarno A.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 48, 203—211 (англ.)

Приводится библиография таблиц и статей, посвященных вычислению интегралов, встречающихся при квантово-механических расчетах молекул. Библиография состоит из трех разделов: А — приведение двухцентровых молекулярных интегралов, В — таблицы двухцентровых молекулярных интегралов, С — многоцентровые интегралы. Раздел А содержит статьи, собранные так, что любой интеграл, расчет которого приведен до числа, может быть найден по крайней мере по одной из них. Раздел В содержит описание таблиц двухцентровых интегралов и вспомогательных функций, опубликованных после 1943 г. Раздел С содержит названия статей (без описания), относящихся к вычислениям многоцентровых интегралов.

В статье имеется ряд опечаток. К. Е. Чернин

6134. Навигационные таблицы Лорана. Лоранг (Loran navigation tables. Lorant Michael), Nautical Mag., 1953, **170**, № 5, 266—267 (англ.)

Подводятся итоги десятилетней работы Вычислительной лаборатории национального Бюро стандартов США по созданию таблиц для навигационной системы Лорана, заказанных Морским министерством США. Эти таблицы также используются Министерством авиации США. Сосчитано более ста таблиц (5000 страниц) для основных морских путей и важнейших военных баз. Первоначально вычисления велись на малых вычислительных машинах, позже на электронном перфораторе. В последнее время была создана программа вычислений на универсальной электронной вычислительной машине СЕАК. Применение этой машины существенно ускорит вычисления и снизит их стоимость.

Утверждается, что таблицы Лорана являются наиболее надежным средством для навигации как на море, так и в воздухе. Далее в популярной форме излагаются принципы навигационной системы Лорана и совсем в общих чертах поясняется сущность вычислений, необходимых для составления таблиц. К. А. Карпов

6135. Архив Королевского общества для неопубликованных математических таблиц (Royal Society depository for unpublished mathematical tables), J. London Math. Soc., 1954, **29**, № 4, 504—512 (англ.)

Сообщается, что в организованном Королевским обществом архиве создана коллекция неопубликованных таблиц. Дается перечень таблиц, принятых на хранение вплоть до конца 1953 г., с кратким их описанием. Список содержит 40 названий. В. Н. Фаддеева

6136. Компактные таблицы математических функций для интерполяции с помощью вычислительных машин. Хирвонен (Nutshell tables of mathematical functions for interpolation with calculating machines. Hirvonen R. A.), Bull. géod., 1953, № 30, 369—392 (англ.; резюме нем., исп., франц., итал.)

На современных клавишных вычислительных машинах можно легко выполнять интерполяцию высокого порядка, что позволяет составлять очень компактные таблицы. Однако обычные разностные формулы считаются для этого непригодными. В качестве удобной формулы рекомендуется получаемая из ряда Тейлора $f(a+th) = f(a) + thf'(a) + \frac{1}{2}t^2h^2f''(a) + \ldots$ формула:

$$f(a+th) = \{[(Dt+C)t+B]t+A\}t + f(a). \qquad (1)$$

Для каждого табличного аргумента a должны быть даны числовые значения коэффициентов: $f(a)$, $A = hf'(a)$, $B = \frac{1}{2}h^2f''(a)$, $C = \frac{1}{6}h^3f'''(a)$, $D = \frac{1}{24}h^4f^{IV}(a)$ и т. д. Вычисление выражения (1) на машине проводится без списывания промежуточных результатов.

Если t придавать как положительные, так и отрицательные значения, то объем таблиц сокращается еще вдвое.

Приводятся различные методы вычисления коэффициентов A, B, C и т. д., и указывается на возможность легко проводить вычисление производных и интегралов в подобных таблицах.

В качестве иллюстрирующих примеров приведены таблицы логарифмов, антилогарифмов, тригонометрических функций, а также даны специальные таблицы, которые упрощают вычисление длин геодезических линий и позволяют проводить эту работу с высокой точностью.

Примечание референта. Удерживая равномерный шаг, что не имеет сколь-нибудь существенного значения для рассматриваемого типа таблиц, автор лишается возможности использовать особенности поведения функции на различных участках изменения независимого переменного. Так, например, для таблицы логарифмов, в конце ее, шаг можно увеличить в 1,7 раза. Вообще следует иметь в виду, что составление таблиц при помощи формулы Тейлора является лишь частным и часто далеко не лучшим методом составления таблицы функций путем их кусочной аппроксимации многочленами. К. А. Карпов

6137. О функциях Бозе — Эйнштейна. Клуни (On Bose — Einstein functions. Clunie J.), Proc. Phys. Soc., 1954, **A67**, № 7, 632—636 (англ.)

Рассматривается вопрос о вычислении функций Бозе—Эйнштейна, которые определены равенствами

$$G_k(\eta) = \int_0^\infty \frac{x^k}{e^{x-\eta}-1}\,dx,\ k>0.$$

Второй интеграл рассматривается в смысле главного значения. Вычисления производятся при помощи формулы, связывающей искомую функцию с интегралами Ферми—Дирака:

$$G_k(\eta) = \sum_{r=0}^{n-1} 2^{-kr}F_k^{\eta}(2^r\eta) + 2_s^{-kn}G_k(2^n\eta),$$

где

$$F_k(\eta) = \int_0^\infty \frac{x^k}{e^{x-\eta}+1}\,dx, \qquad k>0.$$

Имеются асимптотические выражения для $G_k(\eta)$ для больших по абсолютной величине значений η, что позволяет пользоваться вышеупомянутой формулой.

Приведена таблица значений $G_{1/2}(\eta)$ с четырьмя знаками после запятой для $\eta = -3\ (0{,}2) - 0{,}6$, $\eta = -0{,}5\ (0{,}1)\ 0{,}5$, $\eta = 0{,}6\ (0{,}2)\ 20$. Ошибка, по утверждению автора, не превосходит единицы четвертого знака после запятой. К. Е. Чернин

6138 К. Таблицы функции $w(z) = e^{-z^2}\int_0^z e^{x^2}dx$ в комплексной области. Карпов К. А., М., Изд-во АН СССР, 1954, 536 стр., 61 руб.

Таблицы содержат значения действительной u и мнимой v частей функции $w(z) = e^{-z^2}\int_0^z e^{x^2}dx$ от комплексного аргумента, заданного в полярных координатах $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, верные до одной единицы пятого знака.

Таблицы вычислены для области $\theta = \pi/2$, $0 \leqslant \rho \leqslant 5$; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant \rho \leqslant 5$; $\theta = 0$, $5 \leqslant \rho \leqslant 10$. Табличная сетка неравномерна.

Имеется возможность использовать таблицы в несколько расширенной области. Таблицы построены так, что для получения значений функций u и v в промежуточных точках табличной сетки приходится производить раздельное интерполирование по каждой из переменных. Интерполирование по ρ (с точностью до

$2 \cdot 10^{-5}$) линейное. Интерполирование по θ рекомендуется производить по формулам Лагранжа, использующим четыре или пять значений функций при фиксированном ρ. При использовании более точной формулы получаемая погрешность почти всюду в табличной области не превосходит $6 \cdot 10^{-5}$.

В специальном приложении даны таблицы коэффициентов интерполяционной формулы Лагранжа.

В. Н. Фаддеева

См. также: 5535К, 5593, 5743, 5884, 5949, 59[illegible] 6144

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

6139. **Французская электронная вычислительная машина КАБ-2022** (CAB-2022 — Calculateur Arithmetique Binaire 2022), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 2, 131—132 (англ.)

Приводятся следующие данные электронной цифровой вычислительной машины КАБ-2022 (CAB-2022 — Calculateur Arithmetique Binaire 2022) фирмы СЭА (SEA): частота повторения импульсов 100 *кгц*; число состоит из 22 двоичных разрядов и 1 разряда знака; система команд одноадресная; запятая фиксирована на левом конце числа; ввод на перфоленте и на магнитной ленте; время сложения и вычитания 0,23 мсек; время умножения, деления и извлечения корня 5,3 мсек; запоминающее устройство: а) быстродействующее на ферритовых сердечниках — 2 группы по 64 числа (одна группа для чисел, другая — для команд), время выборки меньше 0,01 мсек; б) промежуточное на магнитном барабане, объемом 8192 числа (64 дорожки по 128 чисел каждая), среднее время выборки около 15 мсек, максимальное время (один оборот барабана) 29,44 мсек.

В машине имеется 8000 кристаллических диодов, 800 электронных ламп, 3500 ферритовых сердечников, потребляемая мощность 8 *квт*.

6140. **Некоторые современные разработки логических пирамид «или-и-или» для цифровых счетных машин. Леондс, Рубинов** (Some recent developments in logical «or-and-or» pyramids for digital computers. Leondes Cornelius, Rubinoff Morris), Convent. Rec. I. R. E., 1953, part 7, 34—36 (англ.)

Описываются методы построения логических пирамид «или-и-или», применяемых в цифровых вычислительных машинах. Рассмотрены критерии выбора параметров на примере одной схемы — последовательного соединения схемы совпадений и смесителя на германиевых диодах, из которых составлена пирамида; на выходе пирамиды — ламповый усилитель. Кроме того, описывается новая, более совершенная схема логической пирамиды с меньшим числом деталей и опорных уровней. Для новой схемы приведен способ расчета ее параметров, времени нарастания и спадания импульсов на выходе схемы и рассмотрена кратко работа схемы. Новая схема пирамиды имеет ряд преимуществ: для нее требуется меньше германиевых диодов; максимальные напряжения и потребляемая мощность уменьшены в 2 раза; меньше временные задержки импульсов; больше входные сопротивления на разных входах (в некоторых случаях в 2 раза). В статье приведена таблица данных новой и старой схем на лампе 6EG7 для случая входного импульса 30 *в*, с фронтом 0,1 мксек и раскачкой на сетке лампы 6 *в*.

А. Н. Мямлин

6141. **Определение причины и предупреждение неисправностей в вычислительной машине Принстонского Высшего исследовательского института. Эстрин** (Diagnosis and prediction of malfunction in the computing machine at the Institute for Advanced Study. Estrin G.), Convent. Rec. I. R. E., 1953, part 7, 59—61 (англ.)

Приводятся основные параметры вычислительной машины ИАС (IAS) и перечисляются меры, принятые при ее разработке для улучшения ее основных эксплуатационных характеристик. Все лампы и сопротивления работают в режиме, при котором рассеиваемая на них мощность не превосходит половины допустимой рассеиваемой мощности. Все схемы спроектированы так, что работа машины не нарушается даже при частичной потере лампами эмиссии (до 50%) и изменении номиналов сопротивлений (±10%). Напряжение сети, питающей машину, поддерживается с точностью до 1%, причем высокочастотная составляющая не превышает 0,25 *в*. На машине проводится ежедневная профилактика, состоящая из следующих этапов: а) проверка надежности работы запоминающего устройства (проверяется попеременное хранение пакетов «нулей» и «единиц»); б) проверка устройств ввода — вывода; в) простая контрольная задача (умножение или деление); г) сложная контрольная задача, использующая всю емкость запоминающего устройства и все операции (продолжается 5 мин.).

При решении задач все вычисления повторяются дважды. Для контроля проводится сравнение результатов суммирования полного содержимого запоминающего устройства для обоих случаев. Ряд «диагностических» программ используется в машине для обнаружения или локализации причины неисправности. Через каждые две недели или месяц эксплуатации машины проводятся специальные профилактические проверки запоминающего устройства, цепей питания и регулирования и всех возможных комбинаций вентилей. Систематически проводится замена и проверка всех ламп, проработавших свыше 5000 час. Для быстрого обнаружения причин неисправностей ведется запись всех встречающихся неисправностей с подробным их описанием.

А. Б. Залкинд

6142. **Методы, используемые для повышения надежности военного электронного оборудования. Уайтлок** (Methods used to improve reliability in military electronics equipment. Whitelock L. D.) Proc. Eastern Joint Computer Conf., 1953, December 8—10, 31—33 (англ.)

Рассматривается вопрос надежности работы электронного оборудования, который стал насущным в связи с насыщенностью вооруженных сил США сложным электронным оборудованием. В качестве показателя этого служит рост использования электронных ламп на эскадренном миноносце: с 60 в 1937 г. до 850 в 1944 г. и до 3200 в 1952 г.

Было установлено, что 60—70% от общего числа неисправностей падает на вакуумные лампы. Остальные неисправности объясняются неудачной разработкой оборудования (40%), дефектами деталей оборудования (30%), неправильной установкой, эксплуатацией и ремонтом (20%), некачественным производством оборудования (10%).

В качестве меры по повышению надежности был отобран ряд типов ламп, конструкции которых оказались самыми надежными. Затем были разработаны програм-

…а увеличения надежности деталей оборудования, а также программа по упрощению конструкций приборов. Были разработаны новые технические условия …а поставку оборудования, предъявляющие более высокие требования. Кроме этого, были приняты меры …широкому распространению технической информации о надежном оборудовании, а также к сбору сведений о выходе из строя оборудования в полевых условиях. Б. И. Шитиков

143. Стоимость программирования и кодирования. Готлиб (The cost of programming and codind. Gotlieb C. C.), Computers and Automat., 1954, 3, № 7, 14—15, 25 (англ.)

Рассматривается средняя стоимость одной команды при составлении библиотечных программ для вычислительной машины фирмы «Ферранти» (Ferranty), установленной в университете в Торонто. Сообщается, что за время с 1 октября 1952 г. по 30 сентября 1953 г. были составлены 20 новых программ, содержащих всего 4500 команд. На эту работу было израсходовано 131 человеко-неделя и 143 часа работы вычислительной машины. Оплата работы, выполненной людьми, составила 10000 долл., стоимость работы машины исчисляется в 3500 долл. из расчета 60 долл. за 1 час работы машины. Таким образом, составление 4500 команд обошлось в 17500 долл.— в среднем 4 долл. за одну команду. Приводится ряд факторов, влияющих на стоимость одной команды. Указывается, например, что стоимость команды в обычной программе значительно меньше стоимости команды библиотечной программы и т. д. В любых случаях стоимость команды будет не меньше 2 и не больше 10 долл.

Анализ стоимости программирования, проделанный фирмой ИБМ (IBM) для машины ИБМ-701, показал, что при составлении грандиозной программы, состоящей из 4000 команд, в среднем готовилось 40 команд за 1 человеко-день. Средства, затраченные на программирование для каждой машины ИБМ-701, составляют от 100 000 до 500 000 долл.

Работники фирмы «Райтеон» подсчитали стоимость составления программы для решения одной и той же оптической задачи на трех весьма отличных машинах со скоростью от 60 до 6000 операций в 1 сек. При сравнении считались эквивалентными по трудоемкости составления одна трехадресная, полторы двухадресных и 2 одноадресных инструкции. Стоимость всех 3 программ была примерно одинакова (25 000—30 000 долл.). Для уменьшения стоимости составления новых программ предлагается автоматическое программирование, специальные программы для проверки кодов и создание библиотеки стандартных подпрограмм.

Указывается, что программа, составленная человеком, более эффективна и экономична, чем программа, полученная автоматическим программированием, хотя последняя будет значительно дешевле. Для уменьшения стоимости программирования автор предлагает ввести единый стандарт в условных обозначениях и публиковать новые программы различных фирм в периодических журналах. А. Б. Залкинд

6144. Программы для вычисления гипергеометрических рядов. Кейхилл (Programs for computing the hypergeometric series. Cahill W. F.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 45, 36—37 (англ.)

Сообщается, что на машине СЕАК существуют программы для вычисления гипергеометрического ряда

$$F(a,\ b;\ c;\ z) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \cdots$$

Для табулирования значений этого ряда при фиксированных вещественных a, b, c и $x = -0{,}9(0{,}1)0{,}9$ требуется 25 мин. Для достижения точности $\varepsilon = 10^{-5}$ при комплексных значениях a, b, c, z вычисляется 65 членов и затрачивается 4 мин., включая ввод и вывод. Л. Н. Королев

6145. Цифровая электронная вычислительная машина ЮДЕК II («UDEK II» digital electronic computer), Radio-Electronic Engng, 1955, 24, № 1, 28 (англ.)

Описывается цифровая электронная вычислительная машина ЮДЕК II (РЖМат, 1955, 2435). В машине более 3000 вакуумных ламп и 7000 германиевых диодов. Во внутреннем запоминающем устройстве используется магнитный барабан, вращающийся со скоростью 3600 об/мин, емкостью 5300 десятизначных чисел, среднее время считывания отдельного числа 8,5 мсек.

ЮДЕК II является одноадресной машиной, 2 кода команды передаются одним десятизначным числом. Основными элементами арифметического устройства являются триггеры. Сложение происходит параллельно-последовательно: двоичные числа, представляющие отдельные десятичные цифры, складываются параллельно, десятичные числа складываются последовательно. Сложение или вычитание девятизначных чисел производится за 1/120 сек., умножение или деление за 1/20 сек. Блок управления содержит 4 отдельных триггерных регистра: 1) регистр программы, который определяет последовательность команд, 2) регистр адреса, который определяет адрес команды, 3) регистр команды, который определяет вид операции, 4) Z — регистр, который определяет кратность применения команды к последовательности чисел. С. Е. Жорно

6146. Вычислительная машина НОРК удобна и надежна в эксплуатации (Engineers humanize research computer), Electronics, 1955, 28, № 1, 8, 10 (англ.)

Краткое сообщение о машине НОРК (NORC) фирмы ИБМ (IBM) (РЖМат, 1955, 3459, 3460). Отмечается удобство ее в эксплуатации. Машина использует входные данные, записанные в десятичной системе. Оператор имеет возможность все время следить за ходом вычислений и при необходимости изменять его. Машина содержит в себе блок динамического испытания; при помощи этого блока все схемы машины могут быть испытаны в действии. Указывается, что машина имеет 8000 ламп и 25 000 диодов.

Приведено фото пульта управления: на фото показан блок 3-дюймовых электроннолучевых трубок, на котором оператор может просмотреть любое содержащееся в машине число. С. Е. Жорно

6147. Вычислительная машина для уменьшения работы по составлению платежных ведомостей (Computer to reduce payroll work), Electronics, 1954, 27, № 7, 12 (англ.)

Сообщение о подготовленной к выпуску в январе 1955 г. новой вычислительной машины ИБМ-702, предназначенной для обслуживания банков и страховых компаний. Приводятся основные характеристики ИБМ-702 (РЖМат, 1955, 1990).

Сообщается, что, по утверждению фирмы ИБМ, в настоящее время находится в эксплуатации или заказано 5500 вычислительных машин фирмы. А. Б. Залкинд

6148. Электронные вычислительные машины. Часть II. Автоматический перевод с одного языка на другой. Земанек (Elektronische Rechenmaschinen. Teil II. Mechanisch-electronische Übersetzung. Zemanek Heinz), Radio-Mag. mit Fernseh-Mag., 1955, 31, № 2, 41—43 (нем.)

Излагаются принципы автоматического перевода с одного языка на другой, сообщается о попытках осуществить переводы научно-технических текстов на вычислительных машинах с программным управлением.

Подлежащий переводу текст побуквенно кодируется и вводится в машину. Поступившее в машину слово срав-

нивается со словами, записанными в «словаре». Словарь помещается на двух магнитных барабанах, вращающихся синхронно. На барабане 1 записаны в кодированной форме слова на языке оригинала, на барабане 2—соответствующие им слова на языке перевода; причем на барабане 1 слова записаны не в алфавитном порядке, а в порядке их повторяемости в языке. При совпадении кода поступившего слова с каким-либо кодом на барабане 1 происходит считывание кода с барабана 2. На барабане 2 возле каждого слова записаны также инструкции, выполняя которые машина выбирает одно из нескольких слов, учитывая при этом выборе предыдущие и последующие слова предложения, придает слову нужную грамматическую форму и производит расположение слов в предложении.

В статье приведены тексты на русском, немецком и итальянском языках и их машинные переводы на английский язык.

Сообщается, что специальные машины для автоматического перевода еще не созданы. С. Е. Жорно

6149. Цифровые вычислительные машины помогают инженерам. Ли, Фьюджилл (Digital computers aid engineers. Lee T. H., Fugill A. P.), Electr. World, 1954, **141**, № 10, 89—91 (англ.)

Сообщается об использовании фирмой «Детройт Эдисон» (Detroit Edison Co.) вычислительных машин для решения задач, связанных с эксплуатацией энергосистем. Применение машины ИБМ-604 для определения стоимости передачи электроэнергии в энергосистеме с восемью источниками э. д. с. дает возможность получить решение, охватывающее 500 случаев, за 50 час. вместо 1700 час. ручного труда. На машине производился как вывод формулы для потерь энергии, так и ее решение.

Для вычисления теплового баланса системы паровых турбин компания применяла цифровую машину ЮДЕК (UDEC). Компания имеет также возможность пользоваться цифровой вычислительной машиной МИДАК (MIDAC) (см. фото).

К реф. 6149

В числе задач, требующих применения вычислительных машин, упоминаются расчет вибрации фундаментов турбин и определение усилий в системах труб при неравномерном их нагреве. В. В. Кобелев

6150. Цифровая вычислительная машина с запоминающим устройством на магнитном барабане (Digital computer with magneticdrum memory), Electronics, 1954, **27**, № 6, 290—291 (англ.)

Сообщение фирмы «Консолидейтид» о цифровой вычислительной машине общего назначения типа «20 (РЖМат, 1955, 1523).

В машине используется двоично-десятичная систем представления чисел. Операции над четырьмя двоич ными знаками одного десятичного разряда произво дятся параллельно, в то время как операции над дес тичными разрядами производятся последовательно Л. М. Шехтма

6151. Фирма ИБМ открывает новую исследовательскую лабораторию (IBM opens new research labs Tele-Tech, 1954, **13**, № 11, 117—118 (англ.)

Сообщение о том, что фирма ИБМ открыла новую исследовательскую лабораторию. Лаборатория буде заниматься исследованием и производством кристал лических диодов и триодов, магнитных сердечников запоминающих электростатических трубок, а такж вопросами технологии и применения печатных схем.

При открытии лаборатории была продемонстриро вана опытная модель электронной вычислительной ма шины, сделанной полностью на кристаллических трио дах (РЖМат, 1955, 1985, 2919).

Сообщается о разработке магнитных сердечников дл запоминающих устройств, причем разрабатываютс сердечники с диаметрами от 1,5 *см* с допуском 0,01 *мм* Сообщается об усовершенствовании запоминающи электронолучевых трубок. Благодаря введению тонко сетки из проволоки диаметром 0,01 *мм* вместо экрана емкость трубки увеличена в 10 раз. Сообщается о раз работке счетной лампы ИБМ-78, наполненной арго ном. Л. М. Шехтма

6152. Новый цифровой дифференциальный анализатор с магнитным барабаном (New magnetic drum differential analyzer), J. Franklin Inst., 1954, **257** № 4, 348 (англ.)

Сообщение о пуске в регулярную работу нового циф рового электронного дифференциального анализатор ETT-100 (РЖМат, 1955, 1994) в Стивенсовском техно логическом институте. ETT-100 имеет 100 интеграторов Емкость машины может быть увеличена до 200 интегра торов путем установки большего магнитного барабана Указывается, что максимальная емкость существую щих машин такого типа — 60 интеграторов. Л. М. Шехтма

6153. Первая машина для решения дифференциальных уравнений, использующая десятичную систему счисления (First decimal digital differential analyzer) Mach. Design, 1953, **25**, № 11, 196, 198 (англ.)

Краткое описание цифрового дифференциального ана лизатора CRC-105 (РЖМат, 1953, 488; 1954, 2383 3484).

6154. Машина для решения дифференциальных уравнений, работающая в десятичной системе счисления (Decimal digital differential analyzer), Rev. Scient Instrum., 1953, **24**, № 11, 1074 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 488; 1954, 2383, 3484.

6155. Десятичная цифровая машина для решения дифференциальных уравнений (Decimal analyzer solve differential equations), Awiat. Age, 1953, **20** № 5, 79 (англ.)

Сообщение о цифровом дифференциальном анализа торе CRC-105.

6156. Воздушные вооруженные силы приобретают новую электронную вычислительную машину (Grif fis gets new electric computer), Air Force Times, 1954 **15**, № 11, 23 (англ.)

Краткое описание эксплуатации цифрового диффе ренциального анализатора CRC-105 (РЖМат, 1953 488; 1954, 2383, 3484).

6157. Автоматические вычислительные машины. Перечень. Сводный список по состоянию на 3 января 1955 г. (Roster of automatic computers. Cumulative

information as of January 3, 1955), Computers and Automat., 1955, 4, № 2, 23—26, 29 (англ.)

В перечень включено 166 наименований машин, относительно которых указано, что 129 являются цифровыми, 26 — непрерывного действия, 5 — комбинированными (цифровыми дифференциальными анализаторами); 134 — электронными, 19 — релейными, 4 — механическими, 2 — релейными и электронными; 124— универсальными, 30 — специального назначения. Из включенных в перечень машин 118 американских, 24 английских, 5 немецких, 3 французских, 3 голландских, 3 японских, 2 шведских, 2 швейцарских, 1 канадская, 1 австралийская, 1 бельгийская, 1 норвежская и др.

6158. **Автоматические вычислительные машины. Перечень. Дополнительный список, по состоянию на 10 марта 1955 г.** (Roster of automatic computers. Supplement, information as of March 10, 1955), Computers and Automat., 1955, 4, № 4, 41 (англ.)

Дополнения и изменения к сводному списку (реф. 3157). Включено 10 машин, из которых 9 являются цифровыми, 1 — непрерывного действия; все машины универсальные, электронные; 8 машин американских, 2 английские.

6159. **Список организаций, работающих в области вычислительных машин и автоматики. Дополнительный список, по состоянию на 3 декабря 1954 г.** (Roster of organization in the field of computers and automation. Supplement, information as of December 3, 1953), Computers and Automat., 1955, 4, № 1, 36, 37 (англ.)

Дополнение к сводному списку (РЖМат, 1955, 1998). В список включено 9 организаций из США и 1 из Канады.

6160. **Список организаций, работающих в области вычислительных машин и автоматики. Дополнительный список, по состоянию на 10 января 1955 г.** (Roster of organization in the field of computers and automation. Supplement, information as of January 10, 1955), Computers and Automat., 1955, 4, № 2, 30, 38 (англ.)

Дополнение к сводному списку (РЖМат, 1955, 1998). В список включено 10 организаций из США.

6161. **Список организаций, работающих в области вычислительных машин и автоматики. Дополнительный список, по состоянию на 10 февраля 1955 г.** (Roster of organisation in the field of computers and automation. Supplement, information as of February 10, 1955), Computers and Automat., 1955, 4, № 3, 24, 32 (англ.)

Дополнение к сводному списку (РЖМат, 1955, 1998). В список включено 14 организаций из США.

6162. **Классификация основных узлов автоматических вычислительных устройств и приборов. Список типов, 1-е издание, сводный список, по состоянию на 3 февраля 1955 г.** (Components of automatic computing machinery — List of types. Editon 1, cumulative, information as of Feb., 3, 1955), Computers and Automat., 1955, 4, № 3, 22 (англ.)

Приводится список типов внешних и внутренних запоминающих устройств, устройств ввода и вывода, арифметических устройств и устройств управления.

6163. **Классификация автоматических вычислительных устройств и приборов. Список типов, 1-е издание, сводный список, по состоянию на 3 октября 1954 г.** (Automatic computing machinery — List of types. Edition 1, cumulative, information as of Oct. 3, 1954), Computers and Automat., 1954, 3, № 9, 24—25, 30 (англ.)

Приводится список типов (30 названий) автоматических вычислительных устройств и приборов.

6164. **Книги и другие публикации. Список 12. Спенсер** (Books and other publications. List 12. Spenser Gordon), Computers and Automat., 1955, 4, № 3, 25—27 (англ.)

Приводится список книг, статей, периодических изданий и других публикаций, имеющих отношение к вычислительным машинам или автоматике (РЖМат, 1955, 4751). В список включено 16 публикаций, вышедших в 1953—1955 гг.

6165. **Книги и другие публикации. Список 13. Спенсер** (Books and other publications. List 13. Spenser Gordon), Computers and Automat., 1955, 4, № 4, 42—44, 48 (англ.)

В список включено 12 публикаций, вышедших в 1954—1955 гг.

6166. **Книги и другие публикации. Список 14. Спенсер** (Books and other publications. List 14. Spenser Gordon), Computers and Automat., 1955, 4, № 5, 33—35 (англ.)

В список включено 12 публикаций, вышедших в 1954—1955 гг.

6167. **Механизированный мозг** (Mechanisovaný mozek), Věda a techn. mládeži, 1954, № 12, 357—358 (чеш.)

Популярный очерк о работах директора Лаборатории математических машин Чехословацкой академии наук, лауреата государственной премии А. Свободы (Antonín Svoboda). Сообщается, что в Чехословакии организовано производство счетно-аналитических машин. В частности, на народном предприятии «Аритма» (Aritma) в Праге построен вычислительный перфоратор, выполняющий умножение и деление. Сообщается также, что спроектирована релейная вычислительная машина (САПО.— *Ред.*). Запоминающим устройством машины служит магнитный барабан.

В кратком введении перед очерком отмечаются заслуги А. Свободы в деле руководства Лабораторией.

Г. Н. Поваров

6168. **Электронный предсказатель погоды** (Electronic weather forecaster), Current Sci., 1953, **22**, № 2, 38 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 931; 1954, 3100.

6169. **Коммерческие применения. Использование при переписи. Мак-Ферсон** (Commercial applications — the implication of census experience. Mc Pherson James L.), Proc. Western Computer Conf. (Febr. 1953), New York, 1953, 49—53 (англ.)

Сообщается об использовании электронной вычислительной машины УНИВАК в Бюро переписи США.

6170. **Электронная вычислительная машина** (Maquina de calcular eletrônica), Rev. mens. inds. brasileiras, 1954, 21, № 248, 61 (порт.)

См. РЖМат, 1955, 1520—1521.

6171. **Вычислительная машина для решения методом последовательных приближений инженерных задач, сводящихся к интегралам. Хэм** (A computer for solving integral formulations of engineering problems by methods of successive approximations. Ham J. M.), Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1953, Techn. Rep., № 241, II + 54 p. (англ.)

6172. **Вычисление на быстродействующих машинах термодинамических функций идеального газа. I. Изотопы воды. Фридман, Хар** (High-speed machine computation of ideal gas thermodynamic functions. I. Isotopic water molecules. Friedman Abraham S., Haar Lester), J. Chem. Phys., 1954, 22, № 12, 2051—2058 (англ.)

6173. **Автоматические цифровые машины в промышленных исследованиях. 1. Клиппингер, Димсдейл, Левин** (Automatic digital computers in industrial research. I. Clippingdr R. F.,

Dimsdale B., Levin J. H.), J. Soc. Indust. Appl. Math., 1953, **1**, 1—15 (англ.)

6174. **Применение вычислительных машин к решению проблем техники химической промышленности. Фукс** (Rechenmaschinen zur Lösung von Aufgaben der Chemie-Ingenieur-Technik. Fuchs Otto), Chem.-Ing.-Techn., 1953, **25**, № 7, 377—385 (нем.)

6175. **Использование вычислительных машин в кинетических расчетах. Джи, Линтон, Мейер, Рейнс** (Use of computers in kinetic calculations. Gee R. E., Linton W. H., Jr, Maier R. E., Raines J. W.), Chem. Engng Progr., 1954, **50**, № 10, 497—502 (англ.)

6176. **Спрос химиков на высокопроизводительные счетные машины. Симаути** (化學者と高性能計算器. 島內武產), 科學 (Кагаку), 1954, **24**, № 5, 246—247 (япон.)

6177. **Использование быстродействующей цифровой машины для прямого определения кристаллических структур. Кокран, Дуглас** (The use of a high-speed digital computer for the direct determination of crystal structures. I. Cochran W., Douglas A. S.), Proc. Roy. Soc., 1955, **A227**, № 1171, 486—500 (англ.)

6178. **Применение электронных счетных машин к научным вычислениям, в особенности к новым методам статистической гидрологии. Веццани** (L'applicazione ai calcoli scientifici delle macchine elettroniche con particolare riguardo ai nuovi metodi di statistica idrologica. Vezzani Renzo), Giorn. genio civile, 1954, **92**, № 6, 443—449 (итал.)

6179. **Сравнение систем управления автоматических цифровых вычислительных машин. Картер, Эллис** (A comparison of order structures for automatic digital computers. Carter W. C., Ellis M.), J. Operations Res. Soc. Amer., 1954, **2**, 42—58 (англ.)

6180. **Моделирующее устройство ТРИДАК** (TRIDAC—A three dimensional analogue computor), Electronic Engng, 1954, **26**, № 322, 550—551 (англ.)

Описание моделирующего устройства ТРИДАК (TRIDAC), сконструированного и построенного совместно фирмами «Эллиотт» (Elliott Brothers) и «Ройал Эйркрафт» (Royal Aircraft Establishment) (РЖМат, 1955, 4048—4049). Дополнительно приводится пример решения задачи для самолета. Скорость самолета в прямом направлении представляется напряжением в масштабе 1 *в* = 16 *км/час*. Это напряжение все время измеряется прибором и регистрируется, так что могут быть получены сведения о скорости в любой момент времени. Напряжение, представляющее прямую скорость самолета, поступает на электронный интегратор, который дает на своем выходе напряжение, представляющее расстояние, проходимое самолетом в желаемом масштабе, например 1 *в* = 161 *км*. Напряжение, представляющее скорость в прямом направлении, может быть подано в устройство, в которое также задается вручную или автоматически направление полета. На выходе этого устройства получается 2 напряжения, соответствующих скорости самолета по двум взаимноперпендикулярным направлениям: например, на север и на восток. Эти два напряжения могут быть поданы на два различных интегратора, на выходе которых напряжения будут соответствовать пути, пройденному в этих направлениях. Положение самолета, определяемое показаниями приборов, может быть нанесено автоматически на карту. Для этого используется специальное устройство, состоящее из плоской доски и двигающейся по ней в направлении восток — запад каретки с пишущим приспособлением, двигающимся относительно каретки в направлении юг—север. При совместном движении каретки и пишущего приспособления перо вычерчивает на бумаге путь самолета. При желании бумага может быть положена на карту соответствующего масштаба. Могут также быть учтены изменения в высоте полета. Для этого должны вводиться данные, соответствующие углу пикирования или подъема. На отдельной установке вычерчивается график высоты полета. Вычисления, проводимые устройством ТРИДАК, учитывают изменение скорости в связи с различными режимами работы мотора и качеством используемого топлива, изменение направления полета, вызываемое управлением элеронами и хвостовыми рулями. Имеется возможность также моделировать работу автопилота. Весьма удобно использовать ТРИДАК для решения задач по перехвату истребителем бомбардировщика. Все вычисления на ТРИДАК производятся в истинном масштабе времени. Вычисления, связанные с решением задачи перехвата, так же как и сам перехват, продолжаются 10 мин. Во время вычислений все интересующие величины регистрируются приборами, автоматическими вычерчивающими устройствами и электронолучевыми трубками. Имеется возможность в любой момент времени остановить ход решения задачи, изменить какие-либо условия, связанные с самолетами и аэродинамическими характеристиками, местом старта истребителя-перехватчика и др., а затем вновь продолжать решение. Таким образом быстро и дешево можно найти оптимальные тактические приемы для разных начальных условий. Применение ТРИДАК для исследований, связанных с проектированием ракет, позволит резко сократить число ракет, выпускаемых для экспериментальной работы, т. е. сбережет средства и время. Отдельные узлы самолета или ракеты могут быть непосредственно включены в схему ТРИДАК, а работа их проверяется в самых различных условиях. Напряжение, получаемое с устройства ТРИДАК, подается на мотор, связанный с реальными элеронами или макетом. Элероны связаны с потенциометром, который питает ТРИДАК напряжением, пропорциональным углу поворота элеронов. Такая система позволяет быстро испытать различные типы моторов для элеронов, причем ТРИДАК имитирует всю систему и различные условия работы. Если требуется, то в такие испытания может быть включен и сам пилот, который обычными для пилотирования приемами управляет различными напряжениями в ТРИДАК. Одной из главных частей большинства задач, решаемых на устройстве ТРИДАК, является изменение координатных осей, которое связано со сложными геометрическими и тригонометрическими вычислениями. Приводится пример задачи перехвата бомбардировщика, когда изменение направления зеркала антенны радиолокатора у истребителя требует при решении соответствующей задачи перехода к другим координатным осям.

А. Б. Залкинд

6181. **Моделирующее устройство ТРИДАК** (TRIDAC), Brit. Engng, 1954, **37**, № 6, 206—208 (англ.)

Приводятся основные характеристики нового электронногидравлического моделирующего устройства ТРИДАК (РЖМат, 1955, 4048—4049, 6180). Длина кабелей и проводов, используемых в машине, превышает 111 *км*. В ТРИДАК используются 2000 реле. Входы и выходы отдельных субблоков усилителей интеграторов, стабилизаторов нуля, а также субблоков, выполняющих умножение, деление и генерирование функций, коммутируются на специальной панели.

Приводится схема расположения отдельных блоков ТРИДАК в специальном здании и размещение оборудования в комнате управления. А. Б. Залкинд

6182. **Для решения сложных задач** (For solving complex problems), Aeroplane, 1954, **87**, № 2256, 569 (англ.)

Краткое сообщение о моделирующем устройстве ТРИДАК (см. РЖМат, 1955, 4048, 4049, 6180, 6181).

83. **Вычислительная машина в Фарнборо** (Farnborough computor), Electr. J., 1954, 153, № 23, 1770 (англ.)
Сообщение о моделирующем устройстве ТРИДАК.

84. **ТРИДАК и АГВАК** (TRIDAC and AGWAC), Discovery, 1954, 15, № 12, 474—475 (англ.)
Краткое сообщение об установке двух новых больших моделирующих устройств, построенных английскими фирмами (РЖМат, 1955, 4048). АГВАК (AGWAC)— уменьшенный вариант ТРИДАКА — установлен в Управлении оружия дальнего действия в Салисбуре (Южная Австралия) (Salisbury). В машине насчитывается до 1000 ламп. Обе машины ТРИДАК и АГВАК используются для исследований, связанных с разработками в области самолетостроения и ракетостроения. Стоимость машины ТРИДАК 750 000 фунтов стерлингов.
А. Б. Залкинд

85. **Моделирующее устройство для управляемых снарядов в Австралии** (Guided weapons analogue computor in Australia.), Mod. Refrig., 1954, № 681, 420—421 (англ.)
Описана система автоматического поддержания температурного режима моделирующего устройства ГВАК (AGWAC).
П. В. Тихонов

186. **Метод электрической аналогии для решения уравнения Лапласа. Жермен** (Méthodes d'analogie électrique pour l'étude de problèmes relevant de l'équation de Laplace. Germain P.), Revue, HF, 1954, 11, № 9, 251—260 (франц.)
Статья обзорного характера. Рассматриваются результаты применения графитной бумаги и электролитической ванны в одной из лаборатории Брюссельского университета (Uniwersité libre de Bruxelles) для решения уравнений Лапласа. Применялась изолированная бумага, покрытая тонким слоем графита. Поверхностное сопротивление проводящей бумаги размерами 45 × × 30,5 *см* около 15 000 *ом*. В качестве электродов брались металлические листы толщиной в 6 *мм*, приклеенные к графитной поверхности с помощью графитоколлоидного раствора. Потенциалы поля замерялись методом компенсации с помощью гальванометра. В электролитических ваннах в качестве проводящей среды применялась водопроводная вода. Размеры ванны 1 × 1,5 *м* и глубина 10 *см*.
Для исследования уравнения Лапласа в пространстве применялись ванны с негоризонтальноплоскими основаниями. Во избежание электролиза воды подавалось переменное напряжение 50 *гц*. Потенциал поля замеряли методом компенсации с помощью зонда из платиновой нити в несколько десятков миллиметров. Установка нуля потенциала осуществлялась с помощью осциллографа. Для снятия эквипотенциальных линий иногда употреблялся сервомеханизм.
Погрешность в точке определялась как разность между измеряемым в данной точке потенциалом и его теоретическим значением, разделенная на разность потенциалов, поданных к среде.
Из множества экспериментов сделан вывод, что погрешность для метода графитной бумаги не превосходит 5%, а для электролитической ванны 1%. Но применение графитной бумаги намного проще метода электролитической ванны.
Приводятся примеры из электрохимии, сопротивления материалов и теплопроводности.
Т. И. Маруашвили

187. **Сетка из нитей для численного решения уравнений Лапласа и Пуассона. Ти** (A string-net analog for the numerical solution of the equations of Laplace and Poisson. Tea Peter L.), J. Franklin Inst., 1954, 258, № 4, 287—303 (англ.)
Описывается модель из натянутых нитей для решения разностных уравнений, аппроксимирующих уравнения Лапласа и Пуассона на прямоугольной сетке. Горизонтальная составляющая натяжения нитей постоянная. К узлам пересечения нитей прикладываются вертикальные (параллельные оси Z) силы, пропорциональные правой части уравнения Пуассона. Из свойств веревочных многоугольников вытекает, что в состоянии равновесия аппликаты Z узлов пересечения нитей удовлетворяют разностным уравнениям, аппроксимирующим уравнения Лапласа и Пуассона. Приводится несколько фотографий моделей из нитей для решения нескольких задач с краевыми условиями первого рода. Одно из полученных при помощи модели решений сравнивается с численным решением и совпадает с последним приблизительно с точностью в два знака.
Е. А. Волков

6188. **Моделирующие устройства для решения систем линейных уравнений. Ван-Де-Ворде** (Machines analogiques pour la résolution de systèmes d'equations linéaires. Van De Voorde Gaston), Revue HF, 1954, 11, № 9, 245—250 (франц.)
Описываются принципы работы двух моделирующих устройств, предназначенных для приближенного решения систем линейных уравнений.
Первая машина, построенная фирмой S. E. A, может автоматически решать системы из 10 уравнений с 10 неизвестными. Автоматичность решения заключается в том, что после того как установлены все постоянные коэффициенты и свободные члены, решения на машине получаются практически мгновенно. Принцип работы этой машины показан на примере системы из 3 уравнений. Стабильность работы машины, а значит, и точность решения на ней линейных уравнений сильно зависят от стабильности коэффициента усиления усилителей.
Вторая машина, построенная фирмой «Консолидейтид» (Consolidated Engineering Corp.), полуавтоматическая. Полуавтоматичность заключается в том, что решения получаются не сразу, а путем последовательного приближения к искомым значениям. Машина может решать системы из 12 уравнений с 12 неизвестными. Все коэффициенты и свободные члены должны быть приведены к базисной величине и находиться в пределах ± 1.
Достоинством этих машин являются простота и легкость эксплуатации. Основным недостатком машин является то, что предлагаемая для решения на них система линейных уравнений должна удовлетворять предельным условиям сходимости простого итерационного процесса или итерационного процесса Зейделя. В противном случае нарушается стабильность работы машины и не гарантируется получение правильного ответа. Таким образом, перед решением на этих машинах системы линейных уравнений необходимо предварительно убедиться, что матрица ее симметричная а квадратичная форма, ею определяемая,— положительно определенная. Чтобы достигнуть этих условий, автор предлагает производить некоторые манипуляции над предлагаемой для решения системой (перестановку строк и столбцов матрицы). Однако предлагаемые манипуляции носят характер случайных проб, что приводит к потере времени и составляет основные неудобства и недостатки описанных двух машин.
Г. К. Кузьминок

6189. **Электрическое моделирующее устройство фирмы «Филбрик». Джибеллато** (La macchina calcolatrice analogica elettrica «G. A. Philbrick». Gibellato Silvio), Univ. e Politecnico Torino. Rend. Sem. Mat., 1953, 12, 53—66 (итал.)

6190. **Настольные моделирующие устройства** (Desktop computer), Radio and Telev. News, 1954, 51, № 4,

56; Instruments and Automat., 1954, 27, № 3, 384 (англ.)

Сообщение фирмы „Ривс инструмент" (Reeves Instrument Corp.) о выпуске моделирующих устройств РЕАК С301 и РЕАК С302 (REAC) (РЖМат, 1955, 2450).

6191. Моделирующее устройство для решения алгебраических уравнений. Хёрнер, Земанек (Eine Analogie-Rechenmaschine mit Schrittschaltantrieb zur Lösung von algebraischen Gleichungen bis zum 6. Grad. Hörner Helmut, Zemanek Heinz), Österr. Z. Telegr.-Teleph.-Funk-und Fernsehtechnik, 1954, 8, № 11/12, 153—158 (нем.)

Описывается электронное моделирующее устройство для решения алгебраических уравнений 6-го порядка с действительными коэффициентами. Переменная величина $z = x + iy$ моделируется синусоидальным напряжением. Напряжение сети 50 *гц* задает направление действительной оси на плоскости Z, напряжение с 90-градусным сдвигом снимается с выхода фазовращающего усилителя. Сложение действительной и мнимой частей комплексной переменной, а также сложение отдельных членов полинома осуществляется в усилительных каскадах с отрицательной обратной связью по току. Переменные x и y меняются дискретно от 0 до 1 через 0,01 по мере движения шаговых искателей. Подробно описана схема моделирующего устройства, наладка и градуировка отдельных элементов; приведены фото монтажа и передней панели. Точность устройства 1%. С. Е. Жорно

6192. Использование расчетного стола и моделирующего устройства для расчета угловых колебаний синхронного генератора. Бики, Шотт (Analyzer interconnections for power swing curves. Bekey G. A., Schott F. W.), Electr. Engng, 1954, 73, № 5, 441 (англ.)

Предлагается использовать для расчета угловых колебаний ротора синхронного генератора моделирующее устройство в сочетании с расчетным столом переменного тока.

Необходимая для расчета колебаний величина, измеренная на расчетном столе, вводится вручную в моделирующее устройство, где с помощью двух интеграторов решается необходимое уравнение. Полученное значение изменения угла автоматически передается на генераторную единицу расчетного стола и расчет продолжается. Общая погрешность составляет 1,5 ÷ ÷ 2%. А. А. Крюков

6193. Точные моделирующие устройства (Precision analoge computers), Electronics, 1954, 27, № 11, 358 (англ.)

Сообщение фирмы «Электроник Ассошиэйтс» (EAT) о возможности решения технических задач из различных областей науки и техники с помощью моделирующих устройств фирмы. А. А. Крюков

6194. Моделирующие устройства. Кнопс, Ванде-Ворде (Analogische rekenmachines. Cnops J., Van de Voorde G.), Ann. Assoc. ingrs Gand, 1954, № 4, 129—138 (голл., резюме франц.)

Приводится описание возможностей моделирующих устройств, собранных из пассивных и активных элементов. В качестве примера рассматривается применение этих машин для решения задачи о механических вибрациях. Б. Я. Коган

6195. Счетная машина для решения некоторых вопросов, связанных с линейными ускорителями на бегущей волне. Кроули-Миллинг (A computer for solving some problems in connexion with travellingwave particle accelerators. Crowley Milling M. C.), J. Scient. Instrum., 1954, 31, № 3, 100—104; Metropol.-Vickers Gaz., 1955, 26, № 429, 127—131 (англ.)

Описывается механическое моделирующее уст ство для решения уравнения движения электрона н нейном ускорителе на бегущей волне. Машина пост на фирмой «Метрополитэн Виккерс Электрикал пани» (Metropolitan-Vickers Electrical Co.).

Записывающее устройство отмечает зависимость зы электрона от положения электрона на оси уск теля для различных начальных фаз. На выходе маш имеется счетчик, указывающий конечную энергию эл рона при разных начальных условиях. Операция у жения и деления выполняется передачей враще с диска на диск при помощи соприкасающихся ша положение которых по радиусу дисков задается по кону множителя (делителя). Интегрирование прои дится с помощью червячной передачи.

Машина была сконструирована для исследова движения частиц в первой секции ускорителя, о зующей пучки. Описываемая конструкция позво быстро находить область начальных фаз электро захватываемых в ускорение, спектр конечной эне частиц и другие характеристики для ускорения эл ронов от 40 до 4000 *кэв*. Точность определения спе порядка ±2% и определения конечной фазы Для перестройки машины на работу с другими ча цами требуются небольшие изменения конструк .Т.

6196. О точности лобовых фрикционных мех змов. Сергеев-Черный В. И., Тр. минара по точности механизмов и машин Ин-та ма новед. АН СССР, 1954, № 6, 35—37

Подробно рассматриваются первичные ошибки бового фрикционного механизма, работающего в жиме редуктора и в режиме интегратора, и вывод суммарные ошибки. Приводится пример расчета ности интегратора. Предлагаются различные спо уменьшения первичных ошибок. В конце статьи сматривается влияние температурных деформаци звеньях фрикционного механизма на точность его боты. Е. А. Во

6197. К вопросу о влиянии следящих систем на ность решения дифференциальных уравнений на ференциальном анализаторе. Рубин С. Б., Семинара по точности механизмов и машин маш вед. АН СССР, 1954, № 6, 18—34

Исследуется дифференциальное уравнение, оп вающее работу следящей системы при решении ференциального уравнения

$$dy/dx = y$$

на машине с лобовыми фрикционными интегратора Рассматривается случай, когда диск вращается с стоянной скоростью, и случай пуска сервомотор также различные способы управления сервомото следящей системы: а) по углу рассогласования, б) дением дополнительного сигнала, пропорциональ линейной комбинации первой и второй производ по времени от угла поворота следящего вала в) введением дополнительного сигнала, про порцион ного производной от угла рассогласования. Выя ются наиболее целесообразные значения парамет следящей системы для достижения максимальной ности при решении уравнения (1). Е. А. Во

6198. Быстродействующий прецизионный тахом Бланд, Купер (A high-speed precision ta meter. Bland W. R., Cooper B. J.), E tronic Engng, 1954, 26, № 311, 2—8 (англ.)

Описывается электронный прецизионный тахом с точностью отсчета 0,01%. Тахометр имеет два диа зона: от 0 до 8000 об/мин и от 10 до 80 000 об/мин. Ч ствительный элемент, связанный с вращающимся лом, выдает импульсы с частотой, пропорциональ угловой скорости вращения этого вала. Тахометр и

итывает общее количество импульсов за определенй промежуток времени (1 или 2 сек.) и показывает орость вращения в оборотах в минуту. При одиночх измерениях показания сохраняются неопределенно лго, при автоматической работе показания сменяются ждые 5÷15 сек, что дает возможность оператору писывать показания. В схеме прибора используются катроны типа CV2271, обеспечивающие визуальный счет в десятичной системе. Калиброванный интервал 1 или 2 сек. задается кварцевым генератором 100 *кгц* точностью ±0,005% с последующим делением частоты декатронах. Прибор может быть использован в качестве частотомера. Приведены блок-схемы и принципиальные схемы всех узлов. В. К. Зейденберг

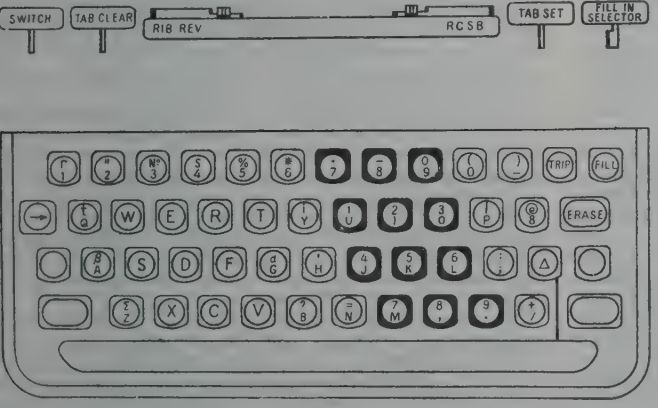
6199. Обратимый двоичный счетчик (A reversible binary counter), Irish Engng, 1953, 4, № 4, 96 (англ.) Триггерный счетчик, считающий импульсы с частотой повторения до 1 *Мгц*. В счетчике может производиться либо сложение, либо вычитание, для чего имеются две группы клапанов, разделяющих разряды счетчика; клапаны каждой группы управляются импульсами с разных анодов триггеров. Выбор той или иной группы осуществляется также электронным путем. Время перехода от сложения к вычитанию или обратно составляет 10 мксек. Н. Я. Матюхин

6200. Новый недорогой универсальный счетчик (Investigate this new, lowcost all-purpose-hp-counter), Mech. Engng, 1953, 75, № 12, 44 (англ.)
См. РЖМат, 1955, 1016.

6201. Электронный счетчик, считающий по десятичной системе (Elektronisch zählen nach dem 10er-System), Elektron, 1953, № 3, 73, 76-77 (нем.)
См. РЖМат, 1954, 5822.

6202. Устройство для записи на магнитную ленту (Юнитайпер, модель II). Вильсон, Мейер (The Model II Unityper). Wilson Louis D., Meyer Saul), Trans. I. R. E., 1953, EC-2, № 4, 19—27 (англ.)

Дается описание устройства для непосредственной записи на магнитную ленту входных данных («Юнитайпер II»), применяемое в быстродействующих вычислительных машинах УНИВАК, и соображения, которые привели конструкторов к выбору механического принципа устройства «Юнитайпер II».



К реф. 6202

Первая модель аналогичного устройства «Юнитайпер», преобразующая входные данные в код для записи на магнитную ленту, была построена на электронных принципах. Однако, как показал опыт ее эксплуатации, для контроля записи и выявления ошибок оператора необходимо наличие визуальной записи. Вторым недостатком этого устройства была чрезвычайно высокая скорость работы электронных устройств, которая превышала возможности оператора, что не оправдывало применения электроники для ручного ввода исходных значений.

Механическая модель кодирующего устройства «Юнитайпер II» дешевле в изготовлении, проще по конструкции и надежнее в работе. Скорость работы устройства вполне достаточная для ручного набора исходных данных. В ней сохранены все эксплуатационные возможности электронной модели.

В качестве конструктивной основы применяется несколько видоизмененная модель стандартной пишущей машинки с электрифицированной клавиатурой (см. рис), имеющей 42 клавишных рычага с механической блокировкой, связанных с литерными рычагами. Посредством специальных механических передач включение клавишного рычага передается на кодирующее устройство, расположенное под пишущей машинкой.

Устройство для подачи магнитной ленты приводится в движение во время подачи каретки пишущего механизма при печати чисел с их одновременной магнитной записью на ленту. Запись на магнитную ленту производится кодом из восьми импульсов. Движение магнитной ленты при записи производится прерывистым способом, с остановкой во время записи. Для исправления ошибок и стирания магнитной записи предусмотрена возможность возврата ленты на один и несколько интервалов.

В статье дается подробное описание работы и взаимодействия механизмов «Юнитайпер II». Приводится принципиальная электрическая схема кодирующего устройства, механизма записи и источников питания. Мощность, потребляемая «Юнитайпер II» (вместе с электромотором привода пишущей машинки), составляет 75 *вт*. В. Н. Рязанкин

6203. Вспомогательное устройство к анализаторам, автоматически вычерчивающее кривую (Analyzer aid traces curve automaticaly), Aviat. Week, 1953, 59, № 12, 55 (англ.)

Сообщение о двух устройствах для автоматического вычерчивания кривых, первое из которых — устройство фирмы «Лоджистикс Рисёрч» (Logistics Risearch, Inc) (РЖМат, 1955, 4073) может служить также для автоматического обвода кривой.

Устройство типа «701» для построения точечного графика фирмы «Компьютер Продукте» (California computer Products) дает 16 точек на 1 *см* со скоростью нанесения до 30 точек в 1 мин. и точностью до 0,06 *см*. Размер чертежа 28 × 43 *см*. А. Б. Штыкан

6204. Устройство для записи и считывания на магнитной ленте фирмы „ИБМ". Баслик (IBM magnetic tape reader and recorder Buslik W. S.), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 86—90 (англ.)

Описывается устройство для записи и считывания цифровой информации на магнитной ленте. Приводятся общая схема устройства, схемы и конструктивные данные отдельных его узлов (бобинных муфт, вакуумного регулятора, старт-стопного механизма, ленточного регулятора, магнитной головки). Конструкция магнитной муфты дает возможность плавного сцепления ротора муфты с бобиной посредством магнитного потока.

Вакуумный регулятор, связанный с насосом, создающим давление в 250 *мм* (10 дюймов) водян. столба, обеспечивает управление муфтами и регулировку на-

тяжения ленты. Чувствительный элемент регулятора выполнен в виде плоской диафрагмы и связанных с ней контактов цепи управления.

Реверсивный старт-стопный механизм обеспечивает остановку и разгон бобины до номинальной скорости в течение 2 *мсек* с момента включения. Катушка, создающая момент вращения, имеет 800 витков и включена в мостовую схему 4 ламп; ток катушки в момент пуска и торможения равен 200 *ма*, при равномерном движении или покое 60 *ма*.

Магнитная головка закрыта 3-слойным экраном из мю-металла. Скорость движения ленты около 2 *м/сек*. Емкость бобины при диаметре в 200 *мм* составляет 420 *м* ленты.

При испытании образца были получены данные: при разгоне бобины до скорости 3,25 *м/сек* время разгона от момента подачи сигнала составляло 6 мсек, время торможения до останова 4 мсек.

Приведены фотографии отдельных узлов.

В. С. Митрофанов

6205. **Техника записи на магнитную ленту и характеристика оборудования. Нордайк** (Magnetic tape recording techniques, and performance. Nordyke H. William, Jr.), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 90—95 (англ.)

Приводятся некоторые данные устройства магнитной записи так называемого прототипа-701 электронной вычислительной машины (prototype-701 Electronic Data-Processing Machine). Магнитные головки — универсальные. Способ записи — «без возврата к нулю» магнитного состояния ленты.

Описываются наиболее характерные дефекты магнитной ленты и причины, которые к ним приводят. Специальное устройство тщательно проверяет возможность применения ленты для магнитной записи. На лентах большой длины можно производить не более 350 записей и считываний без появления ошибок.

Максимальное время работы магнитного устройства без ошибок (пренебрегая ошибками самой ленты) составляло 528 час. Приведена дискуссия по статье.

В. П. Разроев

6206. **Многоштифтовое (или матричное) электронное печатающее устройство фирмы «Истмэн Кодак». Томпсон, Хант** (The Eastman Kodak multiple-stylus electronic printer. Thompson R. G., Hunt C. E. Jr), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Sistems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 118—122 (англ.)

Описывается электронное нефотографическое быстродействующее печатающее устройство, работающее от сигналов, поступающих с перфокарт. Оно может работать также от сигналов с магнитной ленты, магнитной проволоки и т. д. или в качестве выходного устройства вычислительной машины.

Печать букв, цифр или символов производится печатающей головкой, состоящей из семи поляризованных реле с одним общим магнитопроводом. Реле управляют 7 штифтами, расположенными в один ряд. Каждый печатаемый знак, состоящий из комбинации 35 точек (5 рядов по 7 точек в ряду), печатается последовательно за пять ударов. Одна головка печатает 300—400 знаков в 1 сек. Устройство состоит из двух раздельных блоков — печатающего и электронного.

В печатающий блок входит 4 печатающих головки, лентопротяжные механизмы для бумажной и копировальной лент, механизм для подачи перфокарт и фотоэлектрическое считывающее устройство, в котором имеется 26 фотоэлементов. Из них 24 считывающих (12 на колонку, считывается с двух колонок одновременно) и два дополнительных: один — для контроля считывания, второй — для управления. Группа из 6 фотоэлементов работает на одну печатающую головку.

Электронный блок состоит из запоминающего, декодирующего и контрольных устройств. Скорость печати 1200—1600 знаков в 1 сек.

Сигналы фотоэлементов усиливаются и поступают в запоминающее устройство, состоящее из 96 (максимальное количество кодов на одной перфокарте) блоков. Каждый блок содержит 7 магнитных элементов, из них 6 запоминают код знака и один — контрольный импульс. С магнитных элементов коды одной группы подаются на 6 триггеров, соединенных с декодирующей матрицей, сделанной на германиевых диодах.

Выходы матрицы в соответствии с кодом знака подаются на 35 вентилей (5 рядов по 7 вентилей каждый). Импульсы с вентилей в определенной последовательности поступают на реле печатающей головки. Контрольные устройства проверяют правильность считывания с перфокарт и передачи из памяти и в случае обнаружения ошибки останавливают печать. Для питания печатающего устройства подается однофазовое напряжение 230 *в*, 60 *гц*. Потребляемый ток 30 *а*.

Сделан вариант устройства без запоминающего блока, т. е. сигналы с фотоэлементов подаются непосредственно на триггера декодирующей матрицы.

С. П. Кузнецов

6207. **Немеханические быстродействующие печатающие устройства. Россгейм** (Nonmechanical high-speed printers. Rossheim R. J.), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 113—117 (англ.)

Описан ряд выходных устройств для цифровых вычислительных машин.

Одно из этих устройств имеет широкую непрерывную магнитную ленту, движущуюся старт-стопно между специальным барабаном и записывающими головками. Барабан непрерывно вращается и имеет ряды выпуклых цифр. При подаче импульсов в записывающие головки на магнитной ленте появляются намагниченные участки, имеющие очертания цифр. Лента приходит в соприкосновение с металлической пылью, которая притягивается к намагниченным участкам. При дальнейшем движении магнитная лента приводится в соприкосновение с бумажной лентой, имеющей клейкую поверхность, на которой остается магнитная пыль, давая очертания записанных цифр. С помощью стирающей головки магнитная лента подготавливается к новой записи. Скорость работы 40 чисел в 1 сек.

Описаны три выходных устройства, где используются катодно-лучевые трубки. В одном из них используется трубка специальной конструкции, имеющая четыре пары отклоняющих пластин. Электронный луч, проходя через первые две пары отклоняющих пластин, попадает на соответствующее место цифрового трафарета. Вторые две пары отклоняющих пластин направляют электронный луч, имеющий уже очертания цифры, в соответствующее место строки на экране трубки. Скорость работы 10 000 знаков в 1 сек.

Во втором устройстве употребляется специальная дешифраторная матрица из ферритовых сердечников, 7×8 сердечников. Растровая развертка (растр $7 \times 8 = 56$ точек) электроннолучевой трубки происходит синхронно с выбором соответствующих сердечников матрицы, так что каждой точке растра соответствует какой-либо сердечник матрицы. В зависимости от магнитного состояния сердечника происходит модуляция луча по яркости так, что на экране электроннолучевой трубки получается изображение цифры.

Была построена установка, работавшая по этому принципу, воспроизводившая до 8000 знаков в 1 сек.

Указывается, что при размере букв в 4 *мм* на экране 15-дюймовой трубки можно получить изображение 5000 знаков.

В третьем устройстве, разработанном Морской исследовательской лабораторией (Naval Research Laboratory), употребляется трубка типа моноскоп, с помощью которой производится модуляция по яркости считывающего луча электроннолучевого индикатора.

Указано на возможность создания выходного устройства с получением изображения цифр на электрохимической бумаге. Изображение получается с помощью применения специальных электродов, дающих очертания цифр на бумаге при пропускании через них импульсов тока.

Описывается ксерографический способ записи. На вращающийся барабан, покрытый фоточувствительным слоем, отбрасывается изображение с электроннолучевой трубки, вследствие чего на цилиндре образуется скрытое электростатическое изображение знака. После этого цилиндр приводится в соприкосновение с неэлектризованным порошком, который прилипает к освещенным участкам поверхности цилиндра, а затем порошковое изображение переносится на бумагу, а излишек порошка удаляется с цилиндра. Наивысшая скорость печати при этом способе лимитируется скоростью работы электроннолучевой трубки как источника изображения и при настоящем состоянии техники определяется в 1000 знаков в 1 сек.

Приведена библиография (6 названий) и дискуссия по этому докладу. В. В. Бардиж

6208. **Оптический прибор для вычислительных машин** (Optical-sensing device for computers), Radio-Electronic Engng Sec., 1954, May, 20, 43 (англ.)

Приводятся технические данные и принцип действия устройства ФОСДИК (РЖМат, 1955, 1536).

6209. **Инфразвуковая цепь задержки. Моррилл** (A sub-audio time delay circuit. Morrill C. D.), Trans. I.R.E., 1954, EC-3, № 2, 45—49 (англ.)

Цепь, осуществляющая задержку электрического сигнала на время порядка нескольких секунд, может быть построена с помощью электронного моделирующего устройства, которое приближает лапласовский оператор сдвига дробно-рациональной функцией. Приближение шестого порядка позволяет получить нелинейность фазовой характеристики 2% в полосе частот 12/T рад/сек, где T — время задержки.

Приводятся экспериментальные кривые входного напряжения и выходного, задержанного на 4 сек. Задерживающая цепь имитировалась на моделирующем устройстве ГЕДА (GEDA).

Указывается, что может быть получено регулируемое время задержки до 100 сек. Приводятся расчетные формулы для определения параметров цепей, связывающих усилители моделирующего устройства.

Упоминается о возможности использования подобных цепей для изучения процессов управления промышленными объектами и для изучения использования цифровых вычислительных машин в замкнутых системах управления. О. В. Росницкий

6210. **Разработаны кристаллы с замечательным свойством запоминать данные** (Crystals with remarkable memory properties developed), Electr. Engng, 1953, 72, № 9, 769 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3885.

6211. **Ферроэлектрические кристаллы, как запоминающие элементы** (Ferroelectric «memory» crystals), J. Franklin Inst., 1953, 256, № 3, 304 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 1476; 1954, 3885.

6212. **Электронная вычислительная машина с усовершенствованным запоминающим устройством** (Electronic «giant brain» has memory improved), J. Franklin Inst., 1953, 256, № 3, 303 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2417, 2418.

6213. **Диоды фирмы «Хьюз» вплавлены в стекло для электрической стабильности** (Hughes diodes are fusion sealed in glass for electrical stability), Electronics, 1953, 26, № 10, 233 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Хьюз» (Hughes Aircraft Co.), содержащее данные германиевых диодов типов 1N55B, 1N68A, 1N67A, 1N99, 1N100, 1N89, 1N97, 1N98, 1N116, 1N117, 1N118, 1N90, 1N95, 1N96, 1N126, 1N127 и 1N128.

6214. **OC10, OC11 и OC12 — три плоскостных полупроводниковых триода для экспериментальных схем** (OC10, OC11, OC12 — 3 junction transistors for circuit experiments), Wireless World, 1954, 60, № 3, 29 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы Mullard Ltd., содержащее данные перечисленных триодов, предназначаемых для усилительных цепей. Н. Б.

6215. **Полупроводниковые триоды для экспериментальной разработки схем** (Transistors for circuit experiments), Nature, 1954, 173, № 4396, 75 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы Mullard Ltd., содержащее данные точечно-контактных полупроводниковых триодов OC50 и OC51.

6216. **Точечно-контактные полупроводниковые триоды фирмы «Филипс»** (Philips point-contact transistors), Electr. Weekly, 1954, 38, № 3, 8 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Филипс» (Philips), содержащее данные точечно-контактных триодов OC50 и OC51 (последний предназначен для коммутационных схем).

6217. **Кристаллические диоды фирмы «Сильвания» для счетных схем** (Sylvania computer crystal diodes), Computers and Automat., 1953, 2, № 9, 5 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Сильвания» относительно диодов с высоким обратным сопротивлением для счетных схем. Приведена кривая обратной ветви вольтамперной характеристики для диода 1N111.

6218. **Полупроводниковые тетроды и пентоды** (Tetrode and pentode transistors), Proc. I.R.E., 1953, 41, № 12, 126A, 128A (англ.)

См. РЖМат, 1954, 4977.

6219. **Кремниевый диод с вплавленным контактом** (Silicon alloy diode), Proc I.R.E., 1953, 41, № 12, 109A (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Белл» (Bell Telephone Laboratories) относительно разработки кремниевого диода для применения в коммутационных схемах и схемах некоторых счетных машин. Указывается, что диоды имеют обратный ток порядка 0,0001 μ. Сообщается, что фирма «Дюпон» (Du Pont) освоила промышленный выпуск очищенного кремния. Дано фото кремниевого диода. Н. Б.

6220. **Фототранзистор** (Phototransistor), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 10, 1011—1012 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Транзистор Продуктс» (Transistor Products, Inc.) относительно фототранзистора *n-p-n* типа X-25. Максимальная рабочая мощность для этого типа составляет 60 *мвт*, максимальная мощность, не разрушающая прибор, 400 *мвт*; частота импульсов до 25 *кгц*. Н. Б.

6221. **Фототранзистор** (Photo transistor), Tele-Tech, 1953, 12, № 11, 106 (англ.)

См. реф. 6220.

6222. **Фототранзистор** (Photo transistor), Instruments, 1953, 26, № 11, 1697 (англ.)

См. реф. 6220.

6223. **Германиевые триоды и диоды** (Germanium transistors and diodes), Tele-Tech, 1953, 12, № 6, 5 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы Radio Receptor Co. Inc., содержащее данные *p-n-p* триодов типов RR14, RR20 и RR21, точечно-контактных коммутационных триодов типов R1698 и R1734, точечно-контактных триодов общего назначения типа 1729 и силовых диодов типов 1N91, 1N92 и 1N93. Н. Б.

6224. **Полупроводниковый триод** (Junction transistor), Radio-Electronic Engng Sec., 1954, May, 26 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Филко» (Philco Corp.) о производстве запаянных в металлический корпус полупроводниковых триодов. Н. Б.

6225. **Устойчивый полупроводниковый триод** (Stable transistor), Western Aviat., 1954, **34**, № 1, 24 (англ.)

Краткая статья относительно полупроводниковых триодов с поверхностным барьером фирмы «Филко». Указывается, что электрохимический способ изготовления таких триодов позволяет управлять толщиной основного электрода с точностью до 0,0000001 дюйма; полупроводниковые триоды с поверхностным барьером работают надежно при частотах до 70 *Мгц*. Н. Б.

6226. **Лучший полупроводниковый триод** (Better transistor), Scient. Amer., 1954, **190**, № 2, 47—48 (англ.)

См. реф. 6225.

6227. **Фирма «Филко» разрабатывает кремниевые полупроводниковые триоды** (Philco Corp. develops transistor with silicon), Broadcast. Telecast., 1954, **46**, № 3, 76 (англ.)

6228. **Германиевые диоды для высокой температуры** (High-temperature germanium diodes), Electr. Engng, 1954, **73**, № 5, 46A, 52A (англ.)

Краткое сообщение фирмы International Rectifier Corp. об изготовлении диодов, которые при повышении температуры от 0 до 85° не изменяют значительно обратного сопротивления. Н. Б.

6229. **Новые германиевые диоды** (New germanium diodes), Proc. I.R.E., 1954, **42**, № 2, 61A (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Райтеон» (Raytheon Manufacturing Co.) относительно новых герметически запаянных диодов. Среди данных других диодов приводятся данные диодов СК 713 и СК 713-Р, предназначаемых для использования в вычислительных машинах (максимальное обратное напряжение 65 *в*, максимальный пиковый ток 150 *ма*, максимальный средний постоянный ток 50 *ма*, минимальный прямой ток при +2 *в* 30 *ма*, максимальный обратный ток при —40 *в* 0,25 *ма*). Н. Б.

6230. **Германиевый триод размером с наперсток** (Thimble size transistor), Radio-Electronics, 1954, **25**, № 1, 10 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 4971. Сообщается, что разработка такого триода оказалась возможной благодаря использованию эффективного способа отвода тепла из области вплавленного контактного соединения германия. Приведено фото триода. Н. Б.

6231. **Полупроводниковые триоды фирмы «Техас Инструментс» будут употребляться в будущем** (TI transistors will fit in your future!), Tele-Tech, 1954, **13**, № 1, 117 (англ.)

Приведены параметры триодов 200, 201, 202 типа *n-p-n*, выпускаемых фирмой «Техас Инструментс» (Texas Instruments Inc.). Л. В. Кутуков

6232. **Герметически запаянные полупроводниковые триоды фирмы «Техас Инструментс»** (TI hermetically sealed transistors), Electronics, 1953, **26**, № 10, 113 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 5330.

6233. **TF-71 — полупроводниковый триод типа *n-p-n* с поверхностным барьером** (*npn*-Flächentransistor TF 71), Radio Mentor, 1954, **20**, № 6, 322 (нем.)

Приведены параметры триода TF-71, выпускаемого фирмой «Сименс и Гальске» (Siemens und Halske) для схем с заземленным основным электродом и с заземленным эмиттером. Выходная мощность триода 150 *мвт*. Л. В. Кутуков

6234. **Полупроводниковые триоды для применения при конструировании оборудования** (Transistors for use in equipment design), Prod. Engng, 1953, **24**, № 9, 224 (англ.)

Краткое сообщение фирм RCA относительно триодов 2N32, 2N33, 2N34 и 2N35 (РЖМат, 1953, 1014).

6235. **Физические основы действия полупроводниковых триодов** (Die physikalische Wirkungsweise der Transistoren), Radio-Mag. mit Fernseh-Mag., 1954, **30**, № 4, 104—106 (нем.)

Краткое элементарное изложение строения электронно-дырочных переходов эффектов выпрямления в полупроводниковых диодах и усиления в полупроводниковых триодах (точечных и плоскостных). В. З. Звягин

6236. **Влияние температуры на статические характеристики германиевых диодов. Франк, Шнейдар** (Vliv teploty na statické charakteristiky germaniových diod. Frank H., Šnejdar V.), Sdělovací techn., 1954, **2**, № 3, 71—72, 73 (чеш.)

6237. **Прецизионное испытательное оборудование для полупроводниковых триодов. Джонсон, Хьюмез, Найт** (Precision transistor test equipment. Johnson R., Humez D., Knight G., Jr.), Tele-Tech, 1954, **13**, № 2, 74—75, 179—183 (англ.)

6238. **Эквивалентные схемы полупроводниковых триодов с заземленным основным электродом. Нейдтхарт** (Transistor-Ersatzschaltungen für die Basisschaltung. Neidthart Herbert), Radiotechnik, 1954, **30**, № 7, 233—240 (нем.)

Подробно рассматриваются способы вычисления и измерения параметров полупроводникового триода, рассматриваемого как четырехполюсник. Приводятся расчетные формулы. Л. В. Кутуков

6239. **Несколько примеров практического применения германиевых диодов. Шнейдар** (Několik praktických použití germaniových diod. Šnejdar Václav), Sdělovací techn., 1954, **2**, № 4, 112—113 (чеш.)

6240. **Полупроводниковые триоды в высокочастотном устройстве** (Transistors on HF), Short Wave Mag., 1954, **2**, № 1, 40 (англ.)

Краткое сообщение об использовании четырех германиевых триодов типа *GST*-1 в параллельной пушпульной схеме высокочастотного передатчика, работающего на частотах 3,5 *Мгц* и 7 *Мгц*. Как указывается в заметке, предполагается установить трансатлантическую связь на подобных передатчиках, построенных полностью на полупроводниковых триодах. Н. Б.

6241. **Блок управления радиолокационным индикатором, выполненный на полупроводниковых триодах. Марковиц** (Transistorized radar scope display unit. Markowitz Raymond S.), Electronics, 1953, **26**, № 10, 182—183 (англ.)

6242. **Счетчик на кристаллических триодах** (Transistorized counter), Aviat. Week, 1954, **60**, № 25, 62 (англ.)

Сообщение фирмы «Гидро-Айрэ» (Hidro-Aire Inc.) о разработанном малогабаритном четырехдекадном счетчике на кристаллических триодах и батарее питания для него. Счетчик работает на частотах до 100 *кгц*. Вес одной декады 72 *г*; потребляемая мощность 180 *мвт*. А. Б. Залкинд

6243. **Как рождаются кристаллические триоды** (How a transistor is born), Aviat. Week, 1953, **59**, № 17, 74, 77 (англ.)

Сообщение фирмы «Гидро-Айре» (Hydro-Aire Inc.), содержащее краткое описание 7 основных этапов в про-

цессе производства точечно-контактных кристаллических триодов из двуокиси германия и соответствующие этим этапам фотографии. А. Б. Залкинд

6244. **Германий** (Germanium), Iowa Engr, 1954, **54** № 7, 46 (англ.)

Краткое описание метода зонной очистки германия. Приведено фото установки.

6245. **Кремний для полупроводниковых триодов** (Silicon for transistors), Tele-Tech, 1953, **12**, № 6, 139 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 5332.

6246. **Полупроводниковые триоды. Санчес-Кордовес** (Transistores. Sánchez-Cordoves J.), Rev. telecomun., 1953, **9**, № 34, 19—31 (исп.)

6247. **Элементарные сведения относительно полупроводниковых триодов** (A. B. C. of transistors), Erda, 1954, **25**, № 12, 24—25, 37 (англ.)

6248. **Полупроводниковые триоды. Вальмарк** (Transistorn. Wallmark Torkel), Tekn. tidskr., 1953, **83**, № 44, 935—941 (швед.)

6249. **О кристаллических диодах и триодах. Патек** (O krystalových diodách a triodách. Pátek Karel), Mat.-přírodověd. rozhl., 1954, **33**, № 2, 55—58 (чеш.)

6250. **Критический взгляд на полупроводниковые триоды** (A critical look at transistors), Tele-Tech., 1954, **13**, № 1, 128 (англ.)

Краткая статья относительно недостатков полупроводниковых триодов, выпускаемых в настоящее время. Указывается, что, несмотря на наличие 60 типов триодов, в настоящее время используется лишь небольшая часть этих триодов; это объясняется недостаточной надежностью и стабильностью характеристик выпускаемых триодов.

6251. **Характеристика германиевых диодов. Шнейдар** (Stejnosměrné charakteristiky germaniových diod. Šnejdar Václav), Sdělovací techn., 1954, **2**, № 2, 39—40 (чеш.)

6252. **Завод-автомат. Дейвис** («Automation». Davis Leon G.), Wireless World, 1954, **60**, № 4, 185—187 (англ.)

Сообщается о работе завода-автомата по выпуску электронной аппаратуры (РЖМат, 1954, 5336; 1955, 496). Приводится описание производственного процесса. Подчеркивается стратегическое значение производства такого типа и отмечается легкость перехода на выпуск военной продукции. В. Д. Князев

6253. **48 000 карт в час на электронной сортировке** (48 000 cards an hour sorted electronically), Railway Age, 1954, **136**, № 23, 23 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» о выпуске новой быстродействующей сортировки перфокарт, работающей со скоростью 48 000 карт в 1 час. Указывается, что в машине используются малогабаритные фотоэлементы, работающие от инфракрасного излучения, проходящего через отверстия перфокарты. В. Н. Лаут

6254. **Двоичное кодирование, горизонтальные поля карты и электронная статистическая машина. Харткемейер** (Binary coding, horizontal card field and the electronic statistical machine. Hartkemeier Harry P.), Amer. Statistician, 1953, **7**, № 4, 19—21 (англ.)

Рассматривается вопрос об использовании массивов перфокарт в качестве библиотечных и патентных каталогов, медицинских и юридических картотек, химического справочника и т. д.

Предлагается для перфорирования данных (индексов) система с пробивкой по горизонтальным полям перфокарты с представлением чисел в двоично-десятичной системе.

Эта система более удобна для поисков карт с одинаковыми индексами, если они находятся в разных рубриках, чем система с вертикальными полями, и позволяет за один прогон массива перфокарт выбирать всю информацию по вопросу, соответствующему данному индексу. На каждой карте имеется 12 рубрик (соответственно числу рядов перфокарты). В каждой рубрике может быть пробито десятизначное десятичное число (индекс), занимающее 40 позиций (очевидно, используются специальные перфокарты с 40 колонками).

Следует отметить, что автор не упоминает о созданном несколько лет тому назад во Франции Саменом (J. Samain) электронном селекторе (РЖМат, 1955, 5463 К), который также обладает всеми вышеописанными возможностями (использование горизонтальных полей и двоичное кодирование). В. П. Черенин

6255. **Интерполяция для точечных диаграмм с помощью автоматических счетных машин. Федер, Ставрудис** (Interpolating for spot diagrams with automatic computing machines. Feder Donald P., Stavroudis O. N.), J. Optical Soc. America, 1953, **43**, № 4, 327 (англ.)

Доклад на весенней сессии Американского оптического общества 19—21 марта 1953 г.

6256. **Использование перфокарт в науке и управлении. Янг** (The use of punched cards in science and administration. Young A.), Advancement Sci., 1954, **10**, № 40, 439—443 (англ.)

6257. **Использование перфокарт для вычисления потерь в сетях высоковольтных передач** (Emploi de la technique des cartes perforées pour le calcul des pertes dans les réseaux de transport à haute tension), Bull. Assoc. suisse électriciens, 1954, **45**, № 18, 756—759 (франц.)

6258. **Использование перфокарт для составления отчетностей. Тейт** (The electric punch card accounting method. Tate C. L.), Ingr. Indonesië, 1953, **5**, № 3, 172—173 (англ.)

6259. **Новая дешевая бухгалтерская машина** (Une nouvelle machine comptable à bas prix...), Commerce et ind., 1953, **6**, № 4, 9 (франц.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» о выпуске новой бухгалтерской машины. Р. Д. Бачелис

6260. **Простое вычислительное устройство для быстрого подсчета промежутков времени. Гаррис** (A simple two-dimensional slide rule for the rapid calculation of time intervals. Harris M. Rachel), Science, 1953, **118**, № 3063, 309—310 (англ.)

Имея своеобразный табель-календарь (см. фиг. А) и бегунок в виде рамки с сеткой на прозрачном окошке (см. фиг. Б), где каждая клетка имеет свой номер от 0 до 99, легко узнаем продолжительность промежутка времени (число дней) от даты X до даты Y (день X считается, день Y нет), если положим бегунок на табель-календарь так, чтобы дата X оказалась под клеткой 0 и прямые сетки совпали с некоторыми прямыми табель-календаря. Тогда номер клетки, под которой окажется дата Y, дает искомый промежуток. Так, чтобы узнать, сколько дней пройдет с 26 января (включительно) до 3 апреля (исключительно), выполняем указанное движение бегунка и видим, что дата 3 апреля оказалась в клетке, сумма координат которой на бегунке равна 67. Следовательно, искомый промежуток составляет 67 дней (если год простой).

Указана возможность построения аналогичных вычислительных устройств для некоторых других расчетов, например с мерами веса. В. М. Брадис

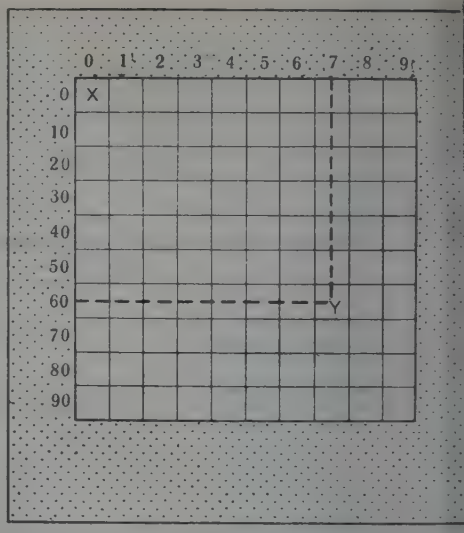
6261. **Эволюция счетной линейки** (Evolution of the slide rule), Wisconsin Engr, 1953, **58**, № 3, 36 (англ.)

Отмечается, что, хотя очень многие пользуются счетной линейкой, но немногие знакомы с историей ее возникновения. Сообщаются некоторые исторические факты. Указывается, что за период с 1800 г. по настоящее

JAN 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	FEB 1	2	3	4	5	6	7	8
31	FEB 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
20	21	22	23	24	25	26	27	28	MAR 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	APR 1	2	3	4	5	6	7	8	9
APR 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	MAY 1	2	3	4	5	6	7	8	9
MAY 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	JUNE 1	2	3	4	5	6	7	8

К реф. 6260

А



Б

время изобретено свыше 256 различных видов счетных линеек См также РЖМат, 1954, 2461. Е. К. Нечаев

6252. Большие электронные цифровые вычислительные машины. Ч. I, II. Земанек (Große elektronische Zahlenrechenmaschinen. Pt. I, II. Zemanek Heinz), Österr. Z. Telegr.-Teleph.-Funk- und Fernsehtechnik, 1954, 8, № 1—2, 7—13; № 3—4, 37—45 (нем.)

Обзорная статья, посвященная современным быстродействующим вычислительным машинам. Дан краткий очерк истории развития вычислительных машин.

Кратко излагаются принципы построения и основные узлы больших цифровых вычислительных машин. Приводятся системы счисления, применяемые в вычислительных машинах; даны элементарные пояснения принципа действия машин, работающих по двоичной системе. Рассматриваются арифметические устройства параллельного и последовательного типов, основные запоминающие элементы регистров и методы выполнения основных операций. Дается классификация запоминающих устройств; приводятся основные характеристики запоминающих устройств на ртутных линиях задержки, на электроннолучевых трубках и магнитном барабане.

Кратко рассматриваются устройства ввода и вывода, блок управления и специальные устройства. Приводится общая блок-схема большой цифровой вычислительной машины. Г. М. Грязнов

6263. Электронные счетные машины. Каднер (Elektronické počitací stroje. Kádner Otakar E). Kartogr. přehl., 1954, 8, № 3, 121—124 (чеш.)

6264. Применение электронных вычислительных машин для решения научных и инженерных проблем. Херд (The application of electronic computers to problems in science and industry. Hurd Cuthbert C.), Analysts J., 1954, 10, № 3, 97—99 (англ.)

Описываются в общих чертах возможности электронных вычислительных машин. Указывается на ряд возможных применений вычислительных машин в науке и промышленности. В. Д. Князев

6265. Коммерческие применения электронных машин. Соваж (Les applications commerciales des calculateurs électroniques. Sauvage A.), Ingrs et techniciens, 1954, № 67, 25—26 (франц.)

Описывается применение электронных машин для коммерческих расчетов. Отмечается, что для коммерческих машин требуется запоминающее устройство большего объема, чем у машин общего назначения, так как в коммерческих расчетах обработке подвергается большее количество исходных данных. Р. Д. Баклин

6266. Вычислительные машины и системы отчетности. Грегори (Computers and accounting systems. Gregory R. H.), Account. Res., 1955, 6, № 1, 38—48 (англ.)

6267. Лампы считают. Брейдо И., Радио, 1953, № 12, 24—27

Описано устройство и работа кольцевых и двоично-декадных схем десятичного пересчета, используемых в цифровых вычислительных устройствах, а также многоэлектродной газоразрядной лампы, предназначенной специально для счетных машин.

В заключение приводится объяснение принципа работы схем, производящих различные математические действия.

Начало см. РЖМат, 1955, 505. Д. Ф.

6268. Двоичная арифметика. Мак-Колл (Binary arithmetic. McCall J. B.), Computers and Automat., 1955, 4, № 1, 11—13 (англ.)

Популярная статья. Описывается выполнение арифметических действий в двоичной системе. С. Е. Жорн

6269 К. Планирование и кодирование задач для электронных вычислительных машин. Т. I, ч. 2; Т. II. ч. 2, Т. III, ч. 2, Гольдстайн, Нёйман (Planning and coding of problems for an electronic computing instrument. Goldstine Herman H., Neumann John, von Washington 25 Library of Congress Publication Board Project, 1953 vol. 1. part 2, 73 pp., Microfilm 3.50 doll., Photostat 10.00 doll.; vol. 2, part 2, 72 pp., Microfilm 3.50 doll., Photostat 10.00 doll.; vol. 3, part 2., 26 pp., Microfilm 2.00 doll., Photostat 3.75 doll.), Bibliogr. Techn. Repts, 1953, **19**, № 6, 198 (библ.)

6270 К. Вычислительная машина ИБМ-650 в применении к страхованию жизни (International Business Machines Corp. (Type 650 for life Insurance applications), New York, International Business Machines Corp., 1954, 24 pp.), Computers and Automat., 1954, **3**, № 5, 26 (библ.)

6271 К. Автоматические цифровые вычислительные машины в промышленных исследованиях. Ч. I, II, III. Клиппингер, Димсдейл, Левин (Automatic digital computers in industrial research. Part I, II, III. Clippinger R. F., Dimsdale B., Levin J. H., Waltham, Mass., Raytheon Manufacturing Co., 1954, 90 pp.), Computers and Automat., 1954, 3, № 5, 24 (библ.)

6272 К. Счетно-решающие устройства. Новосельцев Я. В., Лебедев А. Н. (Учебн. пособие для техникумов), М.—Л., Машгиз, 1954, 399 стр., 8 р. 20 к.

Допущено в качестве учебного пособия для техникумов Министерства транспортного и тяжелого машиностроения. В книге изложена теория и расчет механических и электрических счетно-решающих устройств, причем большая часть объема книги посвящена механическим счетно-решающим устройствам.

Книга состоит из восьми глав. Во введении авторами кратко излагается история развития счетно-решающих приборов в России и дается определение и классификация счетно-решающих устройств.

В гл. I рассматриваются способы ввода и передачи величин и их масштабы. Далее в гл. II описываются и приводится расчет вспомогательных деталей механических счетно-решающих устройств (валики, направляющие, винтовые и зубчатые передачи, муфты, отчетные механизмы и т. д.).

В последующих главах рассматриваются суммирующие множительно-делительные, тригонометрические, функциональные и интегрирующие устройства, как механические, так и электрические. Последним уделена сравнительно малая часть объема книги, в то время как механические устройства рассматриваются более полно и подробно.

В качестве суммирующих устройств в книге приведены: суммирующие шкалы, различные дифференциалы, винтовые и рычажные сумматоры, сумматоры с применением сельсинов, схемы суммирования токов и напряжений (мостовые и компенсационные схемы). Из множительных устройств рассматриваются рычажные множительные механизмы с постоянным и переменным масштабом, потенциометрические и мостовые схемы и схемы с вращающимися трансформаторами.

Отдельная глава посвящена устройствам для получения тригонометрических функций (синусные построители, координаторы, построители треугольников, синусно-косинусные вращающиеся трансформаторы и потенциометры). Рассмотрен вопрос об устойчивости работы координатора при автоматическом построении вектора, являющийся новым в книгах по счетно-решающим устройствам. Следует отметить также описание векторно-электрического метода суммирования, который в других учебных пособиях отсутствует.

Больше внимания уделено функциональным устройствам для ввода экспериментальных и табличных функций. Кроме механических средств воспроизведения функций (механизированные графики, кулачки различного типа, коноиды), рассмотрены и электрические способы образования функций. К числу их относятся функциональные потенциометры с электрическим профилированием для функций одного и двух переменных, фигурные потенциометры, мостовые схемы для функций секанса и тангенса.

Обширная глава книги посвящена дифференцирующим и интегрирующим устройствам, главным образом механическим. Здесь следует отметить фрикционный интегратор с двумя шарами, часто применяемый до сих пор, грибовидный интегратор и тахометры различных типов. Из электрических устройств рассматриваются лишь емкостно-омические и индуктивно-омические дифференцирующие контуры, что является явно недостаточным. Электронным усилителям для управления двигателями и так называемым «операционным усилителям» посвящен всего лишь один параграф, что является недостаточным при современном широком применении электроники в счетно-решающих приборах.

Последняя небольшая глава книги дает описание принципиальных схем узлов, некоторых счетно-решающих приборов и методы типовых расчетов их механических элементов. Книга в целом написана простым и четким языком и по механическим счетно-решающим устройствам является вполне достаточным пособием не только для техникумов, но и для ВУЗов. Раздел же электрических счетно-решающих устройств представлен недостаточно полно. Ф. В. Майоров

6273 К. Теория и практика логарифмической счетной линейки. Корберг (Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes. Kohrberg A. 11 Aufl., 64 S., 15 Abb.), Neue techn. Bücher, 1953, **30**, № 5, 117

6274 К. Логарифмическая счетная линейка. Хмелевский (Logarytmiczny suwak rachunkowy. Chmielewski Heliodor, Wyd. 3. rozszerzone, Warszawa, Panstw. Wydawn, Techniczne, 1953, 47 s., 3.6. zł.), Przew. bibliogr., 1953, 9(217), № 46, 603

6275 К. Логарифмическая линейка в кораблевождении (Логаритмичната линийка в корабоводенето. София, Държ. воен. изд., 1954, 80 с., 3—50 лв.), Български книгопис, 1954, 58, № 5, 159

6276 П. Электронное множительное устройство. Диккинсон (Electronic multiplier. Dickinson Arthur H.), [International Business Machines Corp.]. Пат. США 2641407, кл. 235—61, 9.06.53

6277 П. Генератор развертки с постоянной амплитудой. Уэллер, Дуайан (Constant amplitude of sweep generator. Weller Edward F., Jr., Doyen Richard G.) [General Motors Corp.]. Пат. США 2645715, кл. 250—27, 14.07.53

6278 П. Полупроводниковые генераторы (Transistor oscillators) [Western Electric Co. Inc.] Австрал. пат. 152493, кл. 05. 5, 6.08.53

6279 П. Схемы усилителей на полупроводниковых триодах. Уоллес (Transistor amplifier circuits. Wallace Robert L.), [Bell Telephone Laboratories Inc.]. Пат. США 2652460, кл. 279—171, 15.09.53

6280 П. Усилители на полупроводниковых триодах (Transistor amplifiers) [Western Electric Co. Inc.]. Австрал. пат. 152312, кл. 05. 5, 10.12.53

6281 П. Спусковые схемы с одним устойчивым положением равновесия на полупроводниковых триодах. Ло (Monostable transistor triggered circuits. Lo Arthur W.) [Radio Corp. of America]. Пат. США 2644895, кл. 307—80, 7.07.53

6282 П. Схемы с одним устойчивым положением равновесия на полупроводниковых триодах. Ло, Мур (Monostable transistor circuits. Lo Arthur W., Moore Raymond P. J.), [Radio Corp. of America]. Пат. США 2644894, кл. 307—88, 7.07.53

6283 П. Кольцевой счетчик на полупроводниковых триодах. Ло (Transistor ring counter. Lo Arthur W.), [Radio Corp. of America]. Пат. США 2644897, кл. 307—88, 7.07.53

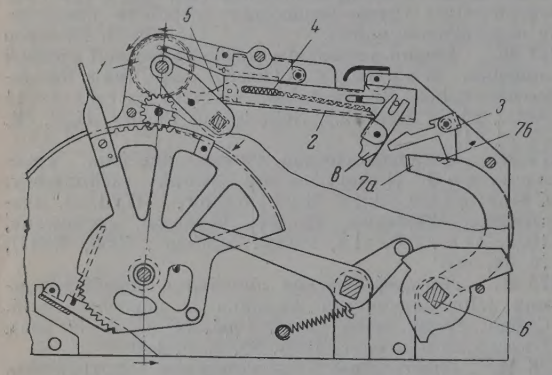
6284 П. Схемы импульсного запоминания на полупроводниковых триодах. Геман (Transistor pulse memory circuits. Gehman John B.) [Radio Corp. of America]. Пат. США 2644892, кл. 307—88, 7.07.53

6285 П. Схемы импульсного запоминания на полупроводниках. Геман (Semiconductor pulse memory circuits. Gehman John B.), [Radio Corp. of America]. Пат. США 2644893, кл. 307—88, 7.07.53

6286 П. **Двухпозиционная схема на полупроводниковом триоде. Ло** (Transistor bistable circuit. Lo Arthur W.) [Radio Corp. of America]. Пат. США 2644896, кл. 307—88, 7.07.53

6287 П. **Суммирующая машина. Энгстром, Энгстром** (Adding Machine. Engstrom Ivan, Engstrom Dorothy). Пат. США 2634056, кл. 235—138, 7.04.53

В суммирующей машине использована новая конструкция механизма передачи десятков. Механизм работает следующим образом: при повороте счетного колеса *1* (см. рис.) предыдущего разряда с позиции «9» к позиции



«0» освобождается ползун *2*, который перемещается на небольшое расстояние до останова его храповой собачкой *3*. Для этого на нижней грани ползуна имеются храповые зубья. После окончания цикла передачи числа в счетчик храповые собачки *3* всех счетных разрядов одновременно отводятся, и ползуны *2*, подготовленные ранее, под действием пружин *4* движутся влево. На левой части ползуна укреплена шарнирно храповая собачка *5* с пружинкой. При движении ползуна влево собачка поворачивает храповое колесо, соединенное со счетным колесом следующего разряда, на одну позицию. Освобождение храповых собачек *3* и возврат ползунов *2* в правое положение производится от главного вала машины *6*. При движении вала против часовой стрелки, его кулачок *7а* давит на рычаг *8* и заводит ползун вправо. При обратном повороте вала кулачок *7б* отводит храповую собачку *3* и освобождает ползун *2*. Е. Н. Маквецов

6288 П. **Механизм управления суммирующей машины. Гудбар, Плак, Фалкнер** (Totalizer engaging means. Goodbar Mayo A., Placke Everett H., Falkner Carl G.) [The National Cash Register Co.]. Пат. США 2661151, кл. 235—60.31, 1.12.53

Счетчик, расположенный на качающейся раме. Дается описание механической схемы управления, производящей подключение счетчика к ведущему элементу (звену) с предварительным включением мотора, который приводит в движение указанное ведущее звено. Е. А. Александрова

6289 П. **Механизм для постоянного механического воспроизведения числа. Чолл** (Constant factor mechanism. Chall Harold J.) [Friden Calculating Machine Co.]. Пат. США 2660377, кл. 235—144, 24.11.53

Узел ведущего звена вычислительной машины. По идее узел имеет сходство с машинами типа «Рейнметалл» (со ступенчатыми валиками). Е. А. Александрова

6290 П. **Объединение нескольких машин, управляемых посредством перфокарт. Дейджер, Шейфер, Грей** (Medelst registerkort styrd maskinkombination. Dayger J. E., Shafer O. B., Gray A. E.), [International Business Machines Corp.]. Швед. пат. 144817, кл. 43а: 41/03, 6.04.54

6291 П. **Устройство для подачи регистрационных карточек. Мак-Донелл** (Anordning för framatning av registerkort. McDonnell J. M.), [Remington Rand Inc.]. Швед. пат. 139001, кл. 43 а: 41/02, 3.02.53

Описывается калатор (карторазкладочный автомат) своеобразной конструкции и определенного назначения. Е. А. Александрова

6292 П. **Регистрационная карточка. Феррин** (Record member. Ferrin Kenneth S.) [National Cash Register Co.]. Пат. США 2650024, кл. 235—61. 12, 25.08.53

Регистрационная карточка для управления проверочно-записывающей машиной состоит из расходной части бланка, на котором могут быть отпечатаны машиной данные, и намагничивающейся части. Намагничивающаяся часть бланка селективно намагничивается машиной за одну операцию и хранит данные, необходимые при проверке последующих операций машины. Записанные данные могут перепечатываться на другие карточки для размножения, а также передавать ранее хранимые данные со старой регистрационной карточки на новую. Я. А. Хетагуров

6293 П. **Бухгалтерская машина со сверочным устройством. Зобиш, Вюнш** (Bokföringsmaskin med jämförelseanordning. Sobisch J., Wünsch H.) [Anker-Werke Akt.-Ges., Bielefeld, Förbundsrepubliken Tyskland]. Швед. пат. 145232, кл. 43 а : 12, 11.05.54

6294 П. **Объединение устройств ввода в бухгалтерских машинах. Феттиг** (Amount enterirg means for accounting machines. Fettig Arthur J.) [Burroughs Adding Machine Co.]. Пат. США 2637494, кл. 235—60.47, 5.05.53

6295 П. **Вычислительное устройство для расчета равновесных состояний пар—жидкость. Бабб** (Computing device for vaperliquid equilibrium calculations. Bubb Frank William) [Phillips Petroleum Co.]. Пат. США 2637495, кл. 235—61, 5.05.53

6296 П. **Устройство для расчета нагрузки. Мак-Доналд, Мейзи** (Load calculating device. McDonald John B., Mazy Frederic W.) [Northrop Aircraft, Inc]. Пат. США 2636270, кл. 33—1, 28.04.53

Устройство для расчета сил, создаваемых грузом самолета и действующих на его связи. Состоит из нескольких шарнирно соединенных шкал, допускающих различную установку в пространстве. В. М. Брадис

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

6297. **Программное управление фрезерным станком. Мак-Донаф, Саскайнд** (A numerically controlled milling machine. McDonough, Susskind A. W.), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 133—137 (англ.)

В Массачусетском университете изготовлено устройство автоматического управления фрезерным станком посредством числовых команд. В устройстве насчитывается 270 электронных ламп, 170 телефонных реле, 300 германиевых диодов. Данные вводятся с перфоленты в период смены направления движения резца в виде численных значений по x, y, z. Вывод заключается в прямолинейном движении резца от одной точки к дру-

гой в соответствии с командами. Данные с перфоленты подаются на релейное запоминающее устройство, разделенное на три части: одна с командами для станины, вторая — для суппорта и третья — для поперечных салазок. В свою очередь каждая из них состоит из двух частей, поочередно управляющих станком или принимающих данные с перфоленты. Данные преобразуются посредством импульсного генератора и распределителя в три последовательности импульсов. После этого декодирующие следящие механизмы преобразуют последовательности импульсов во вращение валов, которое с помощью силовых механизмов затем переводится в линейные движения станка. В статье описан принцип работы только распределителя импульсов и декодирующих сервомеханизмов.

Программирование и подготовка команд должны отражать ход резца на основании чертежей детали, последовательность операций и скорость подачи; требуется знание работы станка. Программирование и кодирование могут выполняться машинным способом.

Приведены фотография станка и блок-схемы узлов управления. Е. И. Мамонов

6298. Диодная матрица как компонент релейно-контактных схем. Буш (The diode matrix as a component in relay switching circuits. Bush G. L.), Commun. and Electronics, 1954, № 10, 833—838 (англ.)

Описывается применение диодных матриц для управления электромагнитными реле в системе биржевого телеграфа для фондовой биржи. Диодами служат селеновые выпрямители на 20 *ма* и 75 *ма*. Эта система биржевого телеграфа позволяет маклерам получать сведения о курсе любой из 600 фондовых ценностей. Курсы ценностей записаны на магнитном барабане с 40 дорожками по 25 позиций (фактически используются 24 дорожки, остальные резервные). Релейно-контактный искатель подключает к барабану в порядке очередности вызовов 6 операторских пультов, снабженных клавиатурой, с помощью которой курсы вводятся на барабан, и 24 передатчика, обслуживающих вызовы маклеров. Вызов маклера, содержащий код ценности, направляется селектором в один из 600 проводов и поступает отсюда в кодирующее устройство, выдающее 8-разрядный адрес этой ценности на барабане. Кодирующее устройство состоит из 40 диодных матриц (фактически используются 24 матрицы). Каждая матрица обслуживает по 25 проводов и содержит 62 выпрямителя. Выпрямители работают с кратковременной перегрузкой в 25%. Матрицы включают электромагнитные реле, которые управляют электронным считывающим устройством, посылающим считанный с барабана курс на передатчик. Приведены скелетные и принципиальные схемы и фотографии. Описан пробник для проверки диодных матриц. В заключение указывается на возможность большей (до 500%) перегрузки выпрямителей с целью уменьшить их размеры и отмечается отсутствие данных по старению выпрямителей. Г. Н. Поваров

6299. Вычислительные машины помогают управлению завода. Осборн (Computers aid factory management. Osborn R. F.), Plant Admin., 1954, **14**, № 5, 64—65, 208, 211 (англ.)

Сообщается о предполагаемой установке вычислительной машины УНИВАК (UNIVAC) на заводах одного из отделений фирмы «Дженерал Электрик». Машина в течение 6 час. в неделю будет подсчитывать и печатать заработную плату для 12 000 служащих заводов. Кроме того, машина будет подсчитывать всевозможные оптовые платежи и их распределение. В конце года с помощью машины будет контролироваться расход материалов, составляться годовой баланс. На машине УНИВАК будет проводиться анализ покупательной способности населения и движение товаров на рынке с целью предварительного планирования производства. Заблаговременное выяснение скрытых тенденций изменения покупательной способности позволит, по утверждению автора, вести производство на оптимальном уровне.

Персонал, обслуживающий машину, составит вначале 32 оператора и техника, затем он вырастает до 47 человек за счет увеличения служащих, работающих на набивке перфокарт, информация из которых после обработки на преобразователе данных будет перенесена на магнитную ленту для непосредственного ввода в машину. Окончательный результат вычислений машина выдает в виде платежных ведомостей, торговых поручений, требований на отгрузку, производственных отчетов и т. д. Вся информация, которая может потребоваться в дальнейшем, будет храниться на магнитных лентах. Л. С. Легезо

6300. На пути к большой автоматизации в нефтяной промышленности. Рок (Towards more automation in petroleum industries. Rock Sibyl M.), Computers and Automat., 1954, **3**, № 3, 6—7, 16 (англ.)

В нефтяной промышленности для контроля состава промежуточного или уже готового продукта применяются масс-спектрометры или инфракрасные спектрометры, однако из-за большого числа анализов чтение записей и вычисления для получения нужных данных, по которым должен быть скорректирован процесс, представляют собой значительные трудности. Для преодоления этого было разработано устройство «Спектросадик», которое включает масс-спектрометр, преобразователь непрерывных данных в цифровую форму и программирующее устройство, выбирающее наибольшее отклонение. Цифровая информация пуншируется на перфокартах или перфоленте и печатается. Затем информация вводится в перфокартную или универсальную цифровую вычислительную машину, которая, произведя вычисления, печатает в цифровом виде указания, необходимые для исправления процесса. Подобное устройство, будучи включенным в контур управления, может послужить основой для полной автоматизации.

В. Д. Князев

6301. История аэронавигации (The air traffic story), Skyways, 1953, **12**, № 9, 18, 19, 48, 50 (англ.)

Описывается принцип действия и приводятся основные характеристики навигационных средств, разработанные, в основном, до второй мировой войны.

Рассматриваются следующие навигационные системы: четырехкурсовые радиомаяки, работающие на средних волнах и УКВ; всенаправленный УКВ радиомаяк (VOR); веерный и «Z» маркеры; радиополукомпасы и автоматические радиокомпасы. В. П. Парамонов

6302. История аэронавигации (The air traffic story), Skyways, 1953, **12**, № 10, 16—18, 54—58, 61 (англ.)

Описывается принцип действия и приводятся основные характеристики современных аэронавигационных средств, а также говорится о средствах, которые в скором времени вступают в действие.

Дается описание следующих аэронавигационных устройств: радиодальномера, работающего с наземным ответчиком; устройства для вычисления курсового угла самолета (РЖМат, 1954, 1920); панорамных индикаторов (РЖМат, 1955, 2978); средств радиосвязи самолета с землей; радиоальтиметра; средств посадки с помощью веерного маркера; системы слепой посадки (ILS). Сообщается о нескольких типах радиолокаторов, применяемых в настоящее время, а также о тех, которые будут скоро применены для целей аэронавигации.

В. П. Парамонов

6303. Авиационный тренажер «Сейбр» (Simulating the Sabre), Flight, 1954, **65**, № 2350, 144—145 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 3528—3530.

6304. **Новые счетные машины фирмы «ИБМ» на службе полиции** (Las nuevas máquinas de cálculo electrónico I. B. M. al servicio de la Policía), Rev. cálculo automát. y cibernet., 1954, 2, № 6, 33—34 (исп.)

Сообщается, что полиция города Лос-Анжелоса (США) применяет счетные машины для обработки материалов уголовной регистрации. Данные о преступниках и их уголовной деятельности заносятся на перфокарты. Машина отсортировывает из этого массива карты с требуемыми данными. Г. Н. Поваров

6305. **Электронные автоматические лифты** (Autotronic-elevators), Electronics and Communs, 1954, 2, № 2, 22 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 1049.

6306. **Автоматические подъемники** (Elevators reject human control.), Mod. Power and Engng, 1954, 48, № 5, 94—95 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 1049.

6307. **«Электронный мозг» осуществляет автоматическое управление лифтами** (Electronic «brain» provides automatic elevator service), Electr. Engng, 1953, 72, № 8, 853 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 1049.

См. также: 5592, 5593, 6105, 6108.